PONCELET

MECANICA

Tratado

de

MECÁNICA

aplicada á las máquinas

por

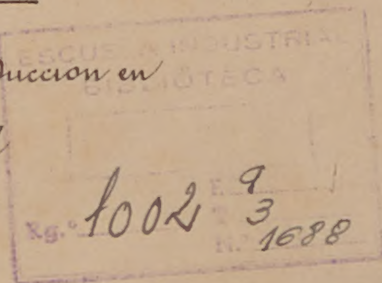
J. V. PONCELET.

Impreso en Bruselas en 1845.

Litografiada la traduccion en

Madrid

1864.



Advertencias.

1.ª Esta traduccion se refiere solo á las secciones 1.ª, 2.ª, 3.ª y 4.ª de la obra de Poncelet, y de ellas se han omitido bastantes números como se conocerá por no ser correlativos los de la traduccion, aunque no son necesarios para la inteligencia de esta.

2.ª Algunas ligeras adiciones ú observaciones agregadas á la traduccion se han señalado ordinariamente con una letra (a) (b) &ª al principio de los párrafos ó números, que servirán para esplicar las pequeñas diferencias que se noten con el original.

3.ª Se ha agregado la última seccion llamada *adicional* porque no forma parte de la obra de Poncelet, y es relativa á los engranages, que se tratan de una manera demasiado sucinta en dicha obra, y se han completado con parte del tratado sobre este objeto de M. Leroy. Los comunicadores y modificadores del movimiento incluidos en la misma seccion están tomados de la Mecánica industrial de Poncelet y alguna parte de la obra de M. Laboulaye.

CURSO DE MECANICA
aplicada á las máquinas.

Primera seccion

Consideraciones generales sobre las máquinas en movimiento.

Objeto de esta seccion.

Esta seccion tiene por objeto exponer los principios generales que constituyen la teoria de las máquinas en movimiento, dar á conocer sus principales propiedades consideradas mecánicamente; prescribir de antemano las reglas y condiciones esenciales que deben servir para su establecimiento; hacer, en fin, apreciar en el caso en que esten construidas, sus defectos, sus cualidades y sus efectos mecánicos ó industriales. Es preciso, sin embargo, tener presente que aquí trataremos únicamente de las máquinas en que es importante la consideracion del empleo de la fuerza y su economia.

Nociones y principios en que se funda la ciencia de los motores y de las máquinas.

Objeto de las máquinas industriales

1. El objeto de las máquinas consideradas bajo el punto de vista industrial, es ejecutar ciertos trabajos de las artes,

con la ayuda de los motores ó fuerzas motrices que presenta la naturaleza, tales como los animales el viento, el agua, el calórico.

Modo de evaluar su potencia, su fuerza productiva y la de sus motores.

2. La potencia ó fuerza productiva de las máquinas y la de los motores, es decir, su poder, sus efectos ó cualidades mecánicas, se evaluan en las artes por la cantidad de trabajo de una especie determinada, que pueden producir en un tiempo dado. Su valor absoluto depende de otros elementos que no son del dominio dela mecánica, pero que, sin embargo, es necesario tener en cuenta en la práctica, tales son, el precio del trabajo, los gastos de su conservacion, el interés delos capitales, la duracion, &ca.

Eleccion de la unidad de medida del trabajo de las máquinas y de los motores.

3. Si la clase de trabajo fuese siempre la misma, seria facil apreciar por medio de la esperiencia el valor mecánico de los motores y de las máquinas, pues que tendria por medida la cantidad de materia confeccionada en un tiempo dado; pero no es asi; los trabajos de los motores y de las máquinas son infinitamente variados, y para poder compararlos entre sí, los mecánicos han debido adoptar una unidad de especie particular; una especie de moneda mecánica como ha dicho Mr. Navier, que pudiese servir fácilmente de medida á toda clase de trabajos, y no dejára absoluta-

mente nada arbitrario en su evaluacion en números.

Se refiere á la elevacion vertical de los cuerpos pesados.

4. Fundados en estas y otras muchas consideraciones que daremos á conocer, se ha escogido para esta unidad el efecto, que consiste en la elevacion vertical de los cuerpos pesados. Nada es por otra parte mas fácil, que evaluar en números el trabajo de que se trata, porque si se toma para unidad el trabajo, que consiste en elevar la unidad de peso á la unidad de altura, parecerá evidente que elevar á una altura cualquiera H un peso dado P, es repetir tantas veces el efecto parcial que corresponde á la unidad de trabajo, como unidades de longitud hay en H, y unidades de peso en P: el producto PH es, pues, la medida natural del efecto ó del trabajo útil total de la fuerza motriz que por su actividad ha elevado el peso P á la altura H, poco importa además el modo con que varia la velocidad propia del agente en intensidad ó en direccion, porque el efecto de que se trata no supone en sí mismo, mas que un esfuerzo vertical constante medido por P, y cuyo punto de aplicacion describe un cierto camino H en su propia direccion.

Esta nocion y esta medida del trabajo mecánico concuerda por otra parte con el método que se sigue en las artes para pagar todos los trabajos que se refieren á la elevacion vertical de pesos: por ejemplo; cuando se trata de sacar agua del fondo de un pozo, de elevar tierras ó materiales cualesquiera á ciertas alturas. En efecto, el precio se arregla siempre proporcionalmente al número de metros cúbicos de cada especie de materia, cuyo peso, y por consiguiente el valor en viento

deben aumentar con la densidad.

Definicion y medida de las fuerzas.

5. Este es el lugar de observar que en adelante no entenderemo por la palabra fuerza, mas que la presion, el esfuerzo de que es capaz un agente cualquiera en una direccion y un punto de terminados, presion y esfuerzo, que son siempre comparables, y pueden medirse por pesos por medio de instrumentos de resorte, tales como el Dinamómetro de Regnier, ciertas romanas del comercio &a., corregidos y verificados de antemano por medio de la suspension de pesos contrastados. Se concibe en efecto, que el mismo grado de flexion de estos resortes suponiendo su elasticidad perfecta é independiente del tiempo ó de la fatiga (lo que no sucede y exije frecuentes verificaciones) indica constantemente el mismo esfuerzo absoluto, la misma presion, siempre que este esfuerzo, esta presion, se ejerza en el mismo punto y en la misma direccion. Asi, para nosotros, las fuerzas podran siempre espresarse en unidades de pesos, en kilogramos, por ejemplo, y no reconoceremos otras; pero como la esperiencia ha hecho ver que la intensidad de la gravedad varia con la posicion de los lugares, es preciso tener bien entendido que esta unidad de peso se refiere á un lugar determinado ó á los diferentes lugares en que la gravedad tiene una intensidad absoluta constante, lo que es sensiblemente cierto para la estension entera de un pais tal como la Francia.

Denominaciones y valores diversos atribuidos á la unidad de trabajo.

6. El producto PH ha recibido de los mecánicos diversas

denominaciones que importa conocer.

Smeaton, ingeniero inglés, á quien se deben numerosas esperiencias sobre las ruedas hidráulicas (*) lo llama potencia mecánica. Carnot en sus principios fundamentales del equilibrio y del movimiento, le llama momento de actividad. Monge y Hachette (véase el tratado de máquinas de este último) le han llamado simplemente efecto dinámico, espresion que tiene el defecto de ser un poco vaga á causa de su generalidad: en fin, Coulomb, seguido en esto por otros muchos, le ha llamado cantidad de accion, palabras espresivas de que tendremos muchas veces que hacer uso, así como la de trabajo que se presenta naturalmente al espíritu, pero que tiene el inconveniente de aplicarse á otra especie de cantidades que se usan ya en la mecánica racional. En cuanto al valor absoluto de la unidad de accion ó de trabajo, diversos autores desde M. M. Mongolfier y Hachette lo han supuesto igual al peso del metro cúbico de agua ó 1000 Kilógramos elevados á un metro de altura, Mr Hachette ha dado á este producto el nombre de gran unidad dinámica: Mr Clement, dinamie; y, finalmente, Mr Coriolis, dinamode (Del cálculo del efecto de las máquinas). Mr Charles Dupin ha propuesto tambien tomar para unidad el peso de un metro cúbico de agua elevado á un Kilómetro de altura, unidad á que ha dado el nombre de dinamo (Curso de mecánica, tomo 3.º pag. 487) pero se supone que este trabajo se hace regularmente en un dia, lo que coloca á la dinamo entre la especie de

(*) Investigaciones esperimentales sobre el agua y el viento, traducido por Mr Girard que ha unido al testo una introduccion histórica muy instructiva.

unidades de que trataremos mas adelante.

La notacion empleada por Mr. Navier (Arquitectura hidráulica de Belidor, tomo 1º, adicion al lib. 1º) que consiste en colocar el índice K×m ó Km á la derecha y un poco encima del producto del peso en Kilógramos y de la altura en metros equivale á tomar por unidad de trabajo 1 Kilogº elevado á un metro de altura, unidad que llamaremos simplemente Kilográmetro á fin de abreviar y evitar el recuerdo de un trabajo particular; la elevacion de los cuerpos pesados, que no es indispensable espresar como lo veremos bien pronto.

Por otra parte, esta última convencion y la anterior, se pueden estender á todas las hipótesis, que pueden hacerse sobre las unidades de peso ó de longitud que entran en las espresiones de las unidades de trabajo. (*)

Unidad de medida del trabajo uniforme. Definicion del caballo dinámico.

7. Cuando la accion de los motores y de las máquinas se continua por mucho tiempo de una manera uniforme, los números que sirven para valuar el trabajo pueden llegar á ser embarazosos por su longitud, y entonces se conviene en no tomar para su medida sino la que se refiere á la unidad de tiempo; por ejemplo: al segundo, minuto &ª

Así es como los mecánicos han llegado á introducir en la nocion del trabajo que sirve de unidad, la idea de la duracion que le es totalmente estraña y no puede aplicarse con exactitud sino á los trabajos en que en cada

(*) Introduccion á la mecánica industrial, pag. 68, nº 83.

unidad de tiempo se desarrolla regularmente la misma cantidad de accion; es preciso, sin embargo, no perder de vista la duracion total y efectiva del trabajo, y tener en cuenta por consiguiente sus intermitencias mas ó menos frecuentes &.ª

Los fabricantes de máquinas de vapor, entre otros, han adoptado generalmente una unidad de accion de esta especie que han llamado impropiamente fuerza de caballo segun la espresion inglesa horse-power, que seria mas exacto traducirla por la de poder de caballo, ó caballo dinámico, atendiendo á que la palabra fuerza tiene un sentido bien determinado (5) en mecánica, y que no concuerda de ningun modo con la idea que se une á la cantidad de accion ó de trabajo. De cualquier manera que sea, como la espresion de fuerza de caballo ha prevalecido generalmente, podremos hacer uso de ella en las aplicaciones de este curso á pesar del defecto que tiene de no presentar en sí misma nada de preciso, porque su valor que no puede ser sino puramente ficticio, se ha definido de otro modo por los constructores mecánicos (vease el parage citado (6) de la nueva edicion de la Arquitectura hidráulica de Belidor). La que parece mas universalmente acreditada en nuestros dias representa una cantidad de trabajo de $75^{K.m}$ desarrollada en cada segundo y se refiere mas particularmente á la unidad llamada rutinaria, adoptada en Inglaterra por Watt y Boulton: tal es tambien el valor que la atribuiremos en lo sucesivo.

Medida del trabajo de fuerzas cualesquiera y especialmente de fuerzas constantes que obran en el sentido del camino descrito por sus puntos de aplicacion

8. Veamos ahora el modo de evaluar generalmente el trabajo

mecánico de cualquier fuerza y reducir la espresion de su medida á las mismas unidades que la que se refiere á la elevacion delos pesos segun la vertical.

Reflexionando un poco sobre ello se vé que ejecutar un trabajo mecánico cualquiera, es vencer de un modo util para la necesidad de las artes, resistencias tales, como la fuerza de adhesion delas moleculas de los cuerpos, la fuerza del calórico y de los resortes, la dela gravedad, la resistencia delos flúidos, los rozamientos, y aun algunas veces la inercia dela materia como cuando se trata delanzar proyectiles, ó de poner en accion algunos martillos, pilones &.ª (No podrian faltar aquí ejemplos detodas clases.) Pero para vencer y destruir sucesivamente las resistencias renovadas continuamente á lo largo de un cierto camino, es preciso un esfuerzo de traccion ó de presion que obre en el punto de aplicacion de esta resistencia, y que se renueve constantemente recorriendo tambien el mismo camino. Ahora puede suceder, ó que el esfuerzo esté dirigido en cada instante en sentido del camino descrito por su punto de aplicacion, ó que este esfuerzo varíe de un modo cualquiera en magnitud y direccion, sin cesar, sin embargo, de hacer constantemente equilibrio á la resistencia que le opone directamente su punto de aplicacion en virtud del principio de la accion igual y contraria á la reaccion.

Consideremos desde luego el primer caso, y supongamos que el esfuerzo, y por consiguiente la resistencia, conserven un valor constante en todos los instantes ó para cada uno delos elementos del camino recorrido, se podrá evidentemente aplicar á este esfuerzo el mismo razonamiento que al caso en que se trataba (4) de elevar directamente un peso á una cierta altura permaneciendo siem-

pre en la misma vertical; la cantidad de accion que desarrollará será, pues, aun aquí (para una longitud dada de camino) directamente proporcional á la intensidad constante de este esfuerzo y al número de veces que se ha repetido, ó al número de resistencias parciales é iguales, que han sido vencidas, es decir, al producto de este esfuerzo espresado en unidades de peso (5) por la longitud efectiva del camino recorrido en su propia direccion y espresado en unidades de distancia. Siendo pues Q el número de Kilóg.^s que miden el esfuerzo y q el número de metros que mide la longitud del camino, el valor del trabajo podrá aun espresarse por $Q^{Kil} \times q^{m}$ ó $Q.q^{Km}$

observando que aquí la unidad de trabajo $1.^{Km}$ se refiere á un esfuerzo constante de 1^{Kil} que se repite á lo largo de un camino de 1^{m} dirigido de un modo cualquiera.

Si se quiere, por otra parte, darse cuenta desde ahora de por qué esta unidad tiene, bajo el punto de vista puramente mecánico, el mismo valor que la unidad análoga relativa á la elevacion de pesos segun la vertical, bastará considerar que las máquinas ofrecen en general medios de trasformar un trabajo industrial cualquiera, en otro, y que aun verificarian esta trasformacion sin pérdida ninguna si se pudiesen evitar completamente las resistencias estrañas, que absorven siempre una porcion mayor ó menor del trabajo motor; pero esto se demostrará directa y generalmente, un poco mas adelante, cuando hayamos establecido algunos otros datos ó principios indispensables.

Caso en que la intensidad de la fuerza varia en cada instante. Su valor medio.

9. Los razonamientos anteriores suponen que el esfuerzo ejercido permanece constante y dirigido siempre en sentido del camino recorrido por su punto de aplicacion; si fuese variable, seria menester considerar lo que sucede en cada elemento de tiempo en que el esfuerzo puede suponerse sensiblemente constante. Siendo Q este valor medio en Kilógramos en el instante en que el punto de aplicacion ha descrito el camino total q en su propia direccion, Qdq será evidentemente la cantidad de trabajo elemental desarrollada por Q á lo largo de dq, é

$$\int Q\,dq$$

tomada entre dos posiciones cualesquiera del punto de aplicacion de la fuerza espresará la cantidad de trabajo total desarrollada en la estension del camino comprendido entre estas mismas posiciones, cantidad que se podrá calcular analíticamente siempre que se tenga Q en funcion de q y en todos los casos por aproximacion por medio del teorema de Tomas Simpson; si se conoce únicamente por la esperiencia, ó de otro modo cualquiera, cada uno de los valores de Q que corresponde á los diferentes valores de q (*)

Llamemos X el esfuerzo medio constante que deberia ejercer otra fuerza dirigida en sentido de dq para pro-

(*) Introduccion á la mecánica industrial n.º 180. Vease mas especialmente respecto de este método de integracion, la pag. 308 del tomo 1.º de los ejercicios de cálculo integral de M.r Legendre, en que este ilustre geómetra dá la espresion analítica del valor que se desprecia, ó del resto de la série.

ducir la misma cantidad de trabajo; q' y q'' los valores de q relativos á la primera y última de las posiciones del punto de aplicacion de X y de Q: de manera que $q''-q'$ será la longitud recorrida del camino; y es evidente que se tendrá para determinar X la relacion

$$X(q''-q') = \int_{q'}^{q''} Q\,dq \text{ de donde } X = \frac{\int_{q'}^{q''} Q\,dq}{q''-q'}$$

La consideracion de este valor medio nos será útil en muchas circunstancias.

Caso en que varia la fuerza de un modo cualquiera en intensidad y direccion.

10 En fin, la fuerza Q podria variar de direccion en cada instante respecto del elemento del camino dq descrito por su punto de aplicacion; siendo α el angulo variable formado por estas direcciones, se concebirá esta fuerza descompuesta en otras dos; una $Q\cos\alpha$ que obrará segun la prolongacion de ds, y la otra $Q\,\text{sen}\,\alpha$ que obre normalmente á la curba descrita por el punto de aplicacion de Q. Esta será evidentemente destruida por la resistencia ó el obstaculo, cualquiera que sea, que obliga al punto de aplicacion de que se trata, á permanecer sobre ds: además, siendo nulo el elemento de camino descrito en su propia direccion, sucederá lo mismo con su cantidad de trabajo de que se podrá hacer abstraccion; pero como tiende á producir compresion, que en los sistemas materiales, tales como las máquinas, dan lugar á resistencias tangenciales estrañas á las fuerzas activas de estos sistemas, y que por esta razon se llaman perjudiciales ó pasivas, será muy conveniente no despreciar el trabajo debido á estas nuevas resis-

tencias en la evaluacion general de los efectos mecanicos de semejantes sistemas. En cuanto á la cantidad de trabajo producida por la otra componente $Q\cos\alpha$ tendrá evidentemente por valor, segun lo que precede, la integral general

$$\int Q\cos\alpha \quad \acute{o} \quad \int Q\,dq$$

que será precio tomar entre los límites convenientes, observando que aquí suponemos que $dq = ds\cos\alpha$, es decir, igual á la proyeccion del elemento de camino recorrido ds sobre la direccion de la fuerza Q: ahora es muy digno de observarse que la cantidad de accion ó de trabajo elemental

$$Q\,dq = Q\cos\alpha\,ds$$

no es mas que lo que, en mecánica racional, se llama momento virtual de la fuerza Q para el movimiento infinitamente pequeño atribuido á su punto de aplicacion; además, se vé que es la misma que la que se obtendria directamente por un raciocinio análogo al que se ha hecho anteriormente para el primer caso, y considerando que el espacio elemental dq descrito por este punto en sentido de la fuerza, es realmente $ds\cos\alpha$.

De esta identidad de naturaleza entre los momentos virtuales y las cantidades de trabajo elementales ó instantáneas de las fuerzas para el caso en que el movimiento virtual considerado, es precisamente el movimiento actual é infinitamente pequeño del punto de aplicacion de estas fuerzas, se deducen inmediatamente diversas consecuencias relativas á las leyes que siguen, en general, las trasmisiones del trabajo, en los sistemas materiales sometidos á potencias

y resistencias cualesquiera; y que son de una aplicacion inmediata á la ciencia de los motores y de las máquinas. Pero para comprender bien esta aplicacion es necesario recordar sucintamente las nociones elementales en que se funda y que han servido para establecer su principio (*).

Lo que se llama propiamente velocidad y cantidad de movimiento.

11. Sabemos que dos fuerzas aplicadas sucesivamente á un mismo cuerpo que cede libremente á su accion, moviéndose paralelamente á sí mismo, en sentido de esta accion, le comunican en el mismo elemento de tiempo dt velocidades infinitamente pequeñas proporcionales á su intensidad respectiva, é independientes del movimiento anteriormente adquirido. Así, siendo p el peso absoluto de un cierto cuerpo ó punto material en un lugar en que la gravedad le comunique la velocidad $g = 9.^{m}8088$ al cabo del primer segundo de su caida, ó $g\,dt$ en cada elemento de tiempo dt pues que se trata aquí de una fuerza aceleratriz sensiblemente constante, y siendo φ otra fuerza motriz cualquiera, capaz de comunicar al mismo cuerpo, y en el elemento de tiempo dt el aumento de velocidad dv, se tendrá

$$\varphi : p :: dv : g\,dt \text{ de donde } \varphi = \frac{p}{g}\,\frac{dv}{dt}$$

Sea del mismo modo p' el peso absoluto (5) de este cuerpo

(*) Los desarrollos de estas nociones pueden verse en los tratados de mecánica de M. M. Prony y Poisson. La esperiencia de la enseñanza en la escuela de aplicacion, nos ha hecho conocer la utilidad de recordar estas nociones, así como la demostracion de los principios generales que de ellas se deducen y sin cuyo conocimiento sería imposible comprender bien la teoría de las máquinas.

en otro lugar cualquiera en que la velocidad comunicada al cabo del primer segundo fuese g' se tendria igualmente

$$\varphi = \frac{p'}{g'}\,\frac{dv}{dt}, \text{ de donde } \frac{p'}{g'} = \frac{p}{g} = const = m.$$

lo que es evidente á priori, pues que, en virtud de la misma ley, se tiene

$$p : p' :: g\,dt : g'\,dt.$$

Ahora la relacion m que permanece independiente de la intensidad de la gravedad en cada lugar, es precisamente lo que se ha convenido en llamar masa del cuerpo, definicion que es preciso admitir sin embarazarse con las ideas físicas ó metafísicas, que lleva consigo algunas veces, de manera que se tiene tambien por un simple convenio

$$p = mg \; (*)$$

Además, como la relacion m no cambia con el volumen ni con la forma, ni con el peso absoluto de un cuerpo, sucede muchas veces que se designan simplemente los cuerpos considerados mecanicamente, por sus masas, y de este modo los designaremos nosotros tambien en lo sucesivo. En virtud de esto, la primera de las ecuaciones anteriores, nos dá, designando por v' la velocidad del cuerpo en el instante en que empieza la accion de la fuerza, y por v la que corresponde á un tiempo cualquiera á

(*) Se ve que en un mismo lugar, ó en un territorio entero, tal como la Francia, la masa permanece sensiblemente la misma y proporcional al peso, y de aqui se deduce que se pueden sustituir ó tomar las masas por los pesos, pero esto no es cierto, sino cuando se trata de compararlas entre sí, en las fórmulas en que entran de un modo homogéneo respecto á las demas cantidades: porque como la hipot.^{s} $m = p$ se reduce á tomar g para la unidad de longitud, se ve muy bien que pueden llegar muchos casos de que tendremos ejemplos en lo sucesivo, en que se cometerian groseros errores, sustituyendo los pesos á las masas.

partir de este instante

$$\varphi = m\frac{dv}{dt} \quad \varphi\, dt = m\, dv \quad \int \varphi dt = m\,(v - v')$$

suponiendo siempre que la fuerza φ mueve al cuerpo $\frac{p}{g}$ en sentido de su direccion misma, que suponemos invariable como para la gravedad. Ahora los productos mv y mv' que corresponden á las velocidades v y v' que poseen los cuerpos al fin y al principio del intérvalo de tiempo en que se considera la accion de la fuerza, son precisamente lo que se ha convenido en llamar las cantidades de movimiento de este mismo cuerpo relativas á los instantes de que se trata, espresion á que no puede atribuirse ninguna idea metafísica, y que no tiene, como la anterior, mas objeto que el de facilitar el enunciado de los teoremas de mecánica en que se reproducen frecuentemente cantidades tales como $\frac{p}{g}v = mv$.

Por otra parte se vé que la cantidad de movimiento que corresponde á una integral de la forma $\int \varphi dt$ tomada entre límites determinados tiene una significacion muy distinta de la que se refiere á la cantidad de accion ó de trabajo (8); de modo que no puede permitirse el que se confunda en las aplicaciones con estas últimas.

Definicion y medida de la fuerza viva.

12. En efecto, llamando siempre en las hipótesis anteriores de al elemento de camino descrito por el punto de aplicacion de la fuerza φ durante el tiempo dt; φde será la cantidad de trabajo elemental, que habrá desar-

rollado en el mismo tiempo; de manera que se tendrá entre los mismos límites de velocidad v' y v, y atendiendo á que $\frac{de}{dt} = v$

$$S\varphi\, de = S m \frac{dv}{dt}\, de = S m v\, dv = \frac{1}{2}(mv^2 - mv'^2)$$

para la espresion de la cantidad de trabajo comunicada desde la posicion en que poseia el cuerpo la velocidad v' hasta aquella en que posée la velocidad v, y que será por otra parte, segun vemos, positiva ó negativa; aunque v sea mayor ó menor que v'; ó segun que la fuerza φ tienda á acelerar ó retardar constantemente el movimiento primitivamente adquirido por el cuerpo, tomando en este último caso el aumento instantáneo dv de la velocidad con signo contrario á v.

Los geómetras han convenido en dar á las cantidades mv^2, mv'^2 el nombre de fuerza viva, espresion impropia, pues que no admitimos mas fuerzas que las de presion, comparables á pesos, y á las que no puede unirse ninguna idea metafísica; pero que se debe considerar como una definicion abreviada del producto de la masa $\frac{P}{g}$ de un cuerpo actualmente en movimiento por el cuadrado de su velocidad efectiva. Por este medio se podrá evitar el confundir una con otra la fuerza viva y la cantidad de trabajo que se refieren á fenómenos y efectos físicos diferentes aunque, numericamente hablando, sean del mismo órden y tengan una medida comun.

En efecto, la ecuacion anterior espresa, suponiendo en ella $v' = 0$, lo que corresponde al caso en que el movimiento principia con la accion de la fuerza; que la

fuerza viva adquirida por el cuerpo es igual al doble de la cantidad de trabajo total, que le ha comunicado esta fuerza.

Definicion y medida de la fuerza de inercia en el movimiento rectilíneo

13. Es un axioma admitido generalmente en mecánica que la accion de una fuerza en su punto de aplicacion es siempre igual, y directamente contraria á la reaccion que le opone este punto. Ahora, resulta de aqui, que la fuerza motriz φ considerada anteriormente debe esperimentar de parte de la masa m una reaccion medida por $-m\frac{dv}{dt}$, que la hace equilibrio y proviene evidentemente de la resistencia opuesta á todo cambio de movimiento por la inercia del cuerpo; he aquí por qué se llama algunas veces á esta resistencia, la fuerza de inercia relativa á la variacion de velocidad dv. Se vé, que cuando el movimiento se acelera, se conduce como una simple resistencia; y cuando se retarda, como una verdadera potencia, representando entonces la fuerza φ la resistencia.

Además, la fuerza de inercia no preexiste en el instante en que principia la variacion del movimiento, sino que nace y co-existe con ella, del mismo modo que la reaccion de un resorte con respecto á la fuerza que le comprime; es decir, sin destruir sus efectos físicos, porque si se aplicase al cuerpo en este mismo instante otra fuerza igual y directamente contraria á la fuerza motriz φ, ó $m\frac{dv}{dt}$ que es capaz de producir la alteracion de velocidad dv, no tendria lugar esta alteracion; el movimiento perma-

neceria uniforme durante el instante dt, y habria simplemente equilibrio entre las fuerzas en el sentido en que ordinariamente se entiende cuando se aplica el principio de D'Alembert, reemplazando las fuerzas del sistema por las cantidades de movimiento que serian capaces de comunicar, ó que comunicarian en efecto en el elemento de tiempo. Se vé, pues, que en el fondo, estas maneras diversas de ver las cosas, se reducen á una misma; pero las consideraciones de las fuerzas de inercia tienen la ventaja de hacer concebir à priori el estado de las cuestiones relativas á la trasmision del movimiento.

Fuerza de inercia en el movimiento curvilineo de un punto material libre: fuerza centrífuga.

14. Supongamos que la fuerza Q cambia en cada instante de direccion, de manera, que el cuerpo que suponemos concentrado en un solo punto material enteramente libre, describe una línea curva cualquiera en virtud de la accion de esta fuerza combinada con su velocidad inicial; el principio de la reaccion igual y contrária á la accion, no dejará, por eso, de subsistir; es decir que la resistencia absoluta y total opuesta por la inercia al cambio de movimiento será aun igual y directamente opuesta á Q, lo que deberá tener lugar por otra parte del mismo modo para sus componentes respectivas segun la tangente y la normal á la curva en el punto de aplicacion. Pero como la componente tangencial de la fuerza motriz produce la variacion de velocidad dv es-

perimentada por el cuerpo en la direccion rectilínea del elemento que describe durante el instante infinitamente pequeño dt, se tendrá, como sabemos, y como por otra parte es evidente á priori para su valor, la cantidad $-m\frac{dv}{dt}$ relativa al caso del movimiento rectilíneo (12); mientras que la componente normal que impide al cuerpo separarse de la curva, deberá ser igual y precisamente contraria á la fuerza centrífuga cuyo valor es, como sabemos $\frac{mv^2}{r}$, siendo r el rádio de curvatura en el punto considerado.

Luego la componente normal de la fuerza de inercia, no es mas que la fuerza centrífuga, y su componente tangencial tiene por valor la cantidad $-m\frac{dv}{dt}$, cuyo signo debe siempre ser contrario al de dv; luego la fuerza de inercia total de la masa m tiene por valor absoluto la cantidad $\sqrt{\left(-m\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(-\frac{mv^2}{r}\right)^2}=m\sqrt{\frac{dv^2}{dt^2}+\frac{v^4}{r^2}}$ que es tambien la de la fuerza motriz φ.

En cuanto á la cantidad de trabajo desarrollada por cada una de estas fuerzas durante el elemento de tiempo dt, es claro (9) que se reduce simplemente á la de sus componentes, es decir, (13) á

$$m\frac{dv}{dt}de=mvdv$$

para la fuerza motriz; y á $-mvdv$ para la de inercia: de manera, que en todas las cuestiones en que se trate únicamente de las cantidades de trabajo desarrolladas por las fuerzas de inercia de las diferentes masas de un sistema, se puede, en rigor, hacer abstraccion delas componentes normales de estas fuerzas, es decir, de las fuerzas centrífugas, para no tener en cuenta sino las que obran en el

sentido del elemento del camino descrito, y que á causa de su actividad particular se podrian llamar las fuerzas vivas de los cuerpos. Pero como esta espresion está universalmente admitida, para designar el valor de su trabajo en un intérvalo de tiempo finito y determinado, la reemplazaremos por la de fuerza de inercia tangencial, y aun algunas veces, á fin de abreviar, la llamaremos simplemente fuerza de inercia.

No se deberá, además, al hacer tales abstracciones, perder de vista que, aun cuando las fuerzas centrífugas de las diferentes masas, no tengan por sí mismas actividad ninguna respecto del trabajo, no por eso dejan de ejercer cierta influencia en el movimiento de los sistemas materiales de que hacen parte, concurriendo simultáneamente con las componentes de las demas fuerzas normales á las curvas descritas por sus puntos de aplicacion respectivos, á desarrollar sobre los puntos de apoyo, sobre las articulaciones de este sistema, si es que existen, presiones que dan lugar á resistencias pasivas analogas al rozamiento, y que se deberán poder calcular cuando la ley del movimiento de los puntos materiales del sistema esté conocida en un instante dado.

Principio de la trasmision del trabajo.

15 Comprendido bien todo esto, no nos será dificil averiguar la importancia que cada especie de fuerzas tiene en un sistema cualquiera de puntos materiales

que se mueven bajo condiciones dadas, y tales como las que constituyen los motores y las máquinas de la industria. En efecto, consideremos en un instante dado ó para una posicion determinada de las diferentes masas, la reunion de todas las fuerzas tanto interiores como esteriores, tanto activas como pasivas (distintas de las fuerzas de inercia) que obran simultáneamente sobre el sistema, y ejercen una influencia apreciable, pero cualquiera, sobre el estado del movimiento de sus diferentes elementos materiales: despues supongamos que á cada uno de estos elementos se aplican otras fuerzas capaces de impedir la modificacion que realmente esperimenta este movimiento en virtud de la accion única de las primeras, y durante el instante infinitamente pequeño de tiempo dt, que sigue al instante de que se trata; es claro que, destruyendo estas nuevas fuerzas el efecto de las otras, les harán equilibrio. Pero estas mismas fuerzas son precisamente iguales en intensidad y en direccion á las reacciones ó fuerzas de inercia (13 y 14) que resultan del cambio de movimiento de las diferentes masas; luego habrá simplemente equilibrio entre todas las fuerzas que obran eficazmente sobre el sistema y estas mismas fuerzas de inercia.

Representando, pues, por $\Sigma Q dq$ la suma de las cantidades de trabajo elementales desarrolladas por las fuerzas eficaces de que se trata, tomando positivamente las cantidades que pertenecen á las fuerzas que obran en sentido del movimiento de su punto de apli-

crecen; y negativamente las de aquellas que obran en sentido contrario; designando del mismo modo por $\Sigma - mvdv = - \Sigma mvdv$ la suma de las cantidades de trabajo relativas á las fuerzas de inercia $-m\frac{dv}{dt}$ de las diferentes masas del sistema, cantidades cuyo signo debe ser siempre opuesto al que toma naturalmente el producto vdv para cada masa m, atendiendo á que la fuerza de inercia obra como resistencia (10) cuando el movimiento de esta masa se acelera, es decir, cuando dv tiene el sentido y el signo de v, y como potencia, cuando disminuye, ó cuando dv tiene un signo contrario al de v; haciendo, digo, estos supuestos, y observando que las cantidades de trabajo no son mas que los momentos virtuales relativos á cada fuerza y al movimiento efectivo del sistema; se tendrá, segun un principio bien conocido (*) la relacion

$$\Sigma Qdq - \Sigma mvdv = 0, \text{ ó } \Sigma Qdq = \Sigma mvdv$$

que expresa que

La suma de las cantidades de trabajo instantáneas, desarrolladas tanto por las diferentes fuerzas que producen la modificacion del mo-

(*) No mencionamos la restriccion concerniente á las ecuaciones de condicion que expresan la naturaleza de los enlaces geométricos del sistema, y en virtud de la cual las velocidades efectivas no pueden sustituirse á las velocidades virtuales, si estas ecuaciones son funciones explícitas del tiempo, porque esta restriccion está comprendida en nuestros enunciados, en que se supone implícitamente, que el movimiento de las diversas masas es debido únicamente á las fuerzas que se pretenden tomar en cuenta, y notablemente que ninguno de los cuerpos del sistema posee ó recibe movimiento independiente de la accion de estas fuerzas á no ser que este movimiento sea uniforme, paralelo é igual en todos estos cuerpos.

vimiento como por las fuerzas de inercia que provienen de esta modificacion, es constantemente igual á cero.

Principio de las fuerzas vivas.

16. Verificándose la ecuacion anterior en todos los instantes, y siendo además independiente del modo de actuar de las fuerzas, que puede ser cualquiera, y aun discontinuo, siempre que se tengan en cuenta las intermitencias de esta accion al apreciar las cantidades de trabajo relativas á cada fuerza, resulta que su 2º miembro será integrable en todos los casos, y que dará lugar á lo que se llama el principio de las fuerzas vivas mirado en la acepcion mas general.

Llamando, en efecto, v' la velocidad de la masa m en el primer instante ó para la primera posicion en que se quiere considerar el sistema; v el valor de esta velocidad para otro instante, ó para otra posicion dada de este sistema:

designando, por otra parte, por $\int Qdq$ la cantidad de trabajo desarrollada por la fuerza cualquiera Q en el mismo intérvalo, trabajo que puede ser intermitente y tomar valores cualesquiera, se tendrá la nueva ecuacion

$$\Sigma \int Qdq = \Sigma \int_{v'}^{v} mvdv = \frac{1}{2} \Sigma \left(mv^2 - mv'^2\right)$$

que espresa que

Entre dos posiciones cualesquiera y dadas, del sistema, el aumento de la suma de las fuerzas vivas de diferentes masas, es igual al doble de la suma de las cantidades de trabajo positivas ó negativas comunicadas en el mismo intérvalo por todas las fuerzas distintas de

la inercia que han obrado sobre el sistema.

Aplicacion del principio de las fuerzas vivas al movimiento de las máquinas.

Idea de la constitucion física de las máquinas y del modo de someterlas al cálculo.

17. Para aplicar el principio de la trasmision del trabajo, ó de las fuerzas vivas, á la teoría de las máquinas, tales como se las considera en las artes, debemos observar que las máquinas se componen en general de una serie de piezas materiales que se comunican el movimiento de una en otra, desde la que está inmediatamente sometida á la accion del motor, y que se llama el receptor, hasta la que ejecuta inmediatamente el trabajo util, y que se llama el util ú operador. Ahora bien, se dá siempre tanto á estas piezas estremas como á las que sirven de intermedios, y que se llaman los comunicadores del movimiento, un grado de solidez, de rigidez ó de inestensibilidad suficiente para que conserven una forma sensiblemente invariable bajo los esfuerzos que tienen que sufrir, y trasmiten la velocidad de una estremidad á otra de la máquina, sin pérdida apreciable, es decir, por leyes dependientes únicamente de la constitucion geométrica del sistema.

Esta hipótesis es, en efecto, la que sirve ordinariamente para establecer la teoria de las máquinas, á fin de evitar las dificultades, que serian muchas veces insuperables en el estado actual de nuestros conocimientos mecánicos, si se qui-

ieran tener en cuenta todas las reacciones moleculares é íntimas que provienen de la compresibilidad de los cuerpos, aun los mas sólidos. Pero no debe olvidarse por esto que esta compresibilidad existe y que es la causa de ciertas pérdidas de trabajo, de ciertas resistencias que no pueden despreciarse en el cálculo de los efectos de las máquinas, y cuyo valor se aprecia de un modo aproximado, bien sea por medio de la esperiencia ó bien por medio del cálculo y del raciocinio.

Modo de tener en cuenta las pérdidas de trabajo provenentes de la reaccion de los resortes moleculares.

18. Los rozamientos, la adherencia y la rigidez de las cuerdas son las resistencias que provienen de causas de esta especie, y que son estrañas al trabajo útil porque suponen desviaciones moleculares, debidas las unas al movimiento tangencial de los cuerpos sometidos á presiones normales, y las otras á sus mayores ó menores flexiones renovadas continuamente. Estas resistencias y algunas otras, tales como las de los medios en que se mueven los cuerpos, acompañan de un modo constante el movimiento de las máquinas, y rara vez se puede prescindir de tenerlas en cuenta.

Respecto á las acciones moleculares que se ponen en juego por el cambio de forma general de las piezas sólidas que se comunican el movimiento, es decir, por la flexion, estension, torsion &. que estas piezas esperimentan en virtud de los esfuerzos debidos á esta reaccion recípro-

proca, la esperencia demuestra que se puede despreciar la consideracion de su trabajo, siempre que el estado de compresion permanezca sensiblemente el mismo, mientras la duracion activa del movimiento, ó que no experimente sino variaciones muy pequeñas

Pero cuando estas variaciones se repiten frecuentemente y de ellas se siguen deformaciones permanentes de los cuerpos; cuando, sobre todo, provienen de las fuerzas de inercia, de las reacciones de todas clases que se desarrollan en los cambios bruscos de movimiento á consecuencia de los choques debidos al encuentro de cuerpos animados de velocidades iguales ó desiguales, es indispensable tener en cuenta las pérdidas de trabajo, que pueden resultar, tanto de estas deformaciones en sí mismas como de los movimientos relativos comunicados á las moléculas, movimientos estraños al que produce la desviacion general de los cuerpos del sistema, y que, segun sabemos, se debilitan rápidamente por su recíproca oposicion, y su diseminacion general en las masas circunvecinas.

Mas adelante espondremos los principios que sirven para apreciar aproximadamente esta pérdida de trabajo. En cuanto ahora nos basta observar: 1.º que la duracion de los choques, tales como los que esperimentan las máquinas, es generalmente despreciable respecto á la del tiempo en que se considera el movimiento de la máquina: 2.º que las piezas que sufren este choque, estan constituidas de manera, que las altera-

ciones de forma que experimentan, son en sí mismas muy pequeñas, y por consiguiente, despues del choque, el sistema se halla en las mismas condiciones, respecto de los enlaces geométricos, que antes, cambiando únicamente la intensidad de la velocidad absoluta de cada punto: 3.º en fin, que el resultado del choque ha sido simplemente una pérdida de fuerza viva que han experimentado los diversos cuerpos, y que está medida por la diferencia de las que el sistema posée antes y despues del choque.

Ecuaciones generales del movimiento de las máquinas segun el principio de las fuerzas vivas.

19. Segun estas diversas consideraciones, se vé que las únicas fuerzas con que es necesario contar en la práctica son: 1.º las fuerzas motrices destinadas á producir el trabajo útil y á vencer todas las resistencias perjudiciales; sus cantidades de accion instantáneas ó elementales pueden representarse (10) por espresiones de la forma $F\,df$ que serán esencialmente positivas: 2.º las resistencias perjudiciales ó pasivas de cualquier naturaleza (18) y que obran de un modo continuo ó intermitente, interin dura el movimiento; sus cantidades de trabajo elementales negativas podrán representarse por espresiones de la forma $-R\,dr$: 3.º, las resistencias útiles que constituyen el trabajo de las últimas piezas de la máquina y hacen el mismo papel que las anteriores; de manera que sus cantidades de trabajo, instantáneas, pueden representarse por términos de la forma $Q\,dq$: 4.º, los pesos de los

diversos elementos materiales del sistema que obrando en el sentido mismo del movimiento, ó en sentido contrario, dan lugar á cantidades de trabajo que representaremos, por consiguiente, por espresiones de la forma $\pm pdh$ ó $\pm mgdh$ siendo m la masa de una molecula material cualquiera, mg ó p su peso (11) y $\pm dh$ la altura, de que baja ó se eleva segun la vertical, y en el elemento de tiempo en que se considera el movimiento de la máquina: 5.º en fin, la fuerza de inercia $-m\frac{dv}{dt}$ (13) de las diversas moléculas de que se trata que producen en el mismo elemento de tiempo, cantidades de trabajo representadas por $-mvdv$, y que se suman ó restan á las de las potencias, segun que la velocidad de cada molecula disminuye ó aumenta, es decir, segun que el producto vdv es positivo ó negativo.

Asi, se tendrá, conservando ademas las notaciones de los números 15 y 16

$$\Sigma mvdv = \Sigma Fdf - \Sigma Rdr - \Sigma Qdq \pm \Sigma mgdh$$

para cada elemento de tiempo; y

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv'^2 = 2\Sigma\int Fdf - 2\Sigma\int Rdr - 2\Sigma\int Qdq \pm 2\Sigma\int mgdh$$

entre dos instantes cualesquiera en que el 1.º corresponde á la velocidad v' anteriormente adquirida por la molecula m, y el último a la velocidad v, que ha recibido en virtud de la influencia de las fuerzas propuestas.

Integracion de los términos relativos á los pesos de las piezas, y observaciones sobre este objeto.

20. Antes de pasar mas adelante observaremos que los

términos $\Sigma mgdh$, $\Sigma \int mgdh$ pueden ponerse bajo una forma mas sencilla suponiéndolos integrados, bien sea para toda la estension de la máquina, ó bien para el intérvalo de tiempo que corresponde á las velocidades v y v' de la masa m; llamando, en efecto, h á la altura á que se ha elevado en este intérvalo la masa elemental de que se trata, M y P la suma de las masas y pesos de todas las partes materiales que constituyen el sistema, es decir, la masa y el peso total de las piezas móviles de la máquina; en fin H la altura á que se ha elevado siempre en este intérvalo de tiempo considerado, su centro de gravedad general, se tendrá evidentemente por la teoria del centro de las fuerzas paralelas

$\Sigma mgh = MgH = PH$, y, $\Sigma mgdh = PdH$; $\Sigma \int mgdh = \Sigma mgh = PH$; relaciones que no tendran lugar sino en tanto que permanezca el mismo, el peso p en cada instante ó que no abandone el sistema ninguna de las masas m durante el intérvalo á que se aplican las sumas é integraciones. Generalmente suponemos que no se aplica el principio de las fuerzas vivas á las máquinas, sino para cada uno de los intérvalos en que permanecen las mismas las condiciones, ó mas bien que si estas condiciones son susceptibles de variar, ya sea en cada elemento de tiempo, ó ya en instantes determinados, se tienen en cuenta estas variaciones al integrar las diferentes cantidades de trabajo, lo que es bien evidente á priori, segun la manera que hemos tenido de mirar (16) el principio de las fuerzas vivas; pero que

exige alguna atencion en las diversas aplicaciones de este principio á los diferentes casos.

Formas abreviadas de las ecuaciones del movimiento.

21. Suponiendo integrada la segunda de las ecuaciones (19) del mismo modo, respecto á cada uno de los términos de que se compone, podremos, con el objeto de abreviar los enunciados, escribirla asi, bajo una forma mas sencilla $mv^2 - mv'^2 = 2(Ff - Rr - Qq \pm PH)$
pero será preciso no olvidar el camino que nos ha conducido á ella, ni la verdadera significacion de cada uno de sus términos.

Representaremos, asimismo, su ecuacion diferencial, que tiene lugar en cada instante del movimiento (9) por

$$mvdv = Fdf - Rdr - Qdq \pm PdH$$

Estas notaciones se reducen simplemente á suponer que las fuerzas variables que obran sobre el sistema, se han reemplazado por los valores medios (9) que les corresponden entre los dos instantes en que se considera el sistema.

Discusion de los diferentes términos de la ecuacion de las fuerzas vivas. Influencia de la gravedad sobre el efecto util.

22. Las ecuaciones que acabamos de establecer y definir contienen implícitamente toda la teoria de las máquinas en movimiento, pero para comprenderlas bien, es necesario examinar, separadamente, la significacion de cada uno de sus términos y su influencia sobre los efectos generales de las máquinas; y, principalmente, sobre

efecto útil Qq que es, evidentemente, el que se trata de hacer lo mayor posible respecto de la cantidad de accion Ff desarrollada por el motor.

Para esto, resolvamos la primera de estas ecuaciones respecto á Qq, y tendremos

$$Qq = Ff - Rr \pm PH + \frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2}.$$

Consideremos primeramente el término PH concerniente á los pesos de las piezas materiales de la máquina. Se vé que desaparecerá de la ecuacion, siempre que el centro de gravedad de todo el sistema, permanezca constantemente á la misma altura, porque entonces, H será igual á cero; de otro modo no desaparecerán de la ecuacion, mas que las partes de este término relativas á los pesos cuyos centros de gravedad permanecen á una misma altura; como se verifica, por ejemplo, para las diversas ruedas centradas ó cuyo eje pasa por el centro de gravedad; para las correas ó cadenas sin fin; para los carretones ó piezas que resbalan sobre planos horizontales &.

En todos estos casos, será preciso no olvidar que si desaparece de la ecuacion anterior el peso de estas piezas, no por eso hay que dejar de tener en cuenta las resistencias de todas clases, á que dan lugar, y cuya influencia se hace sentir en los términos relativos á los rozamientos y á las fuerzas vivas del sistema.

Dejando ahora aparte el caso en que uno de los cuerpos de la máquina se elevase ó descendiese constantemente mientras dura el movimiento, pues que, su peso p (19) formaria parte de la resistencia útil Q ó de la fuerza mo-

triz F, nos queda que examinar aquel en que bajase ó subiese alternativamente como se verificaria, por ejemplo, para una rueda no centrada ó que no girase alrededor de su centro; para una sierra vertical que recibiese su movimiento de un manubrio &c. Entonces si no abandona nunca á la máquina no producirá su peso mas efecto que el de aumentar y disminuir periódicamente, y de cantidades iguales, la suma de las cantidades de accion comunicadas por las demás fuerzas, es decir, de manera que esta suma y el efecto útil Qq no se alterarán absolutamente entre dos instantes en que resultase su posicion la misma pues que entre estos instantes se tendrá $Spdh = 0$; pero si el peso de las piezas que gozan de un movimiento alternativo no ejerce ninguna influencia perjudicial sobre el efecto util, produce ciertas resistencias cargando los puntos de apoyo y alterando, como lo veremos en lo sucesivo, la velocidad y la fuerza viva del sistema relativas á cada instante.

Influencia de las resistencias pasivas y de los choques.

23 No puede decirse nada semejante respecto del termino Rr que contiene las cantidades de trabajo debidas á las resistencias pasivas de toda especie, porque tienden constantemente (19) á destruir cierta porcion del trabajo motor Ff; he aquí por qué se tendrán que examinar en cada caso los medios de disminuir su influencia que sean mas á propósito, buscando la forma, la

velocidad y la disposicion que conviene dar á las partes que estén sometidas á él, para que sea mínimo el producto Rr.

Por otra parte, es esencial distinguir (18) las resistencias pasivas que obran de un modo contínuo ínterin la duracion del movimiento, tales como las resistencias del medio, el rozamiento &c. de las que no se reproducen sino por ciertos intérvalos y en instantes escesivamente cortos, tales como las que desarrollan los choques ó cambios bruscos cualesquiera, de velocidad de los cuerpos del sistema. Como las primeras obran del mismo modo que la gravedad ó que cualesquiera fuerzas motrices, se concibe que se pueden evaluar fácilmente sus cantidades de trabajo, siempre que se conozca la ley de su intensidad (10); en cuanto á las otras, es preciso suponer que, durante el intérvalo muy corto de tiempo en que recobran y se comprimen los cuerpos, se ponen en accion las fuerzas moleculares, de manera que desarrollan en sentido contrario del movimiento, cantidades de trabajo que, numéricamente hablando, son la mitad (18) de la suma de las fuerzas vivas destruidas ínterin la duracion del choque, suma que es siempre comparable á la fuerza viva total del sistema, aun cuando los cuerpos que entren en él, fuesen de los que se llaman perfectamente elásticos, es decir, tales que, despues del choque, recobran la forma que tenian antes de él.

Inconveniente de los choques aun cuando constituyan el efecto útil: medios de evitarlos.

24. Se observará además que si se destina el choque á producir un efecto útil como cuando se trata de comprimir ó aplastar un cuerpo bajo la accion de una maza ó un martillo, se debe admitir que una parte de la fuerza viva perdida por las piezas la máquina pertenece al producto Qq; esta es la estrictamente necesaria para producir el cambio de forma que tiene lugar, en la materia que hay que comprimir ó dividir.

Se concibe aun, que la mayor parte de la fuerza viva de la maza se emplearia útilmente si fuese perfectamente rígida y elástica, si su forma y su constitucion física no se alterase en un mismo choque, ó por la repeticion de estos, y si no conservase, en fin, despues del choque, así como la materia que le está sometida, ninguna velocidad relativa y estraña al efecto útil; pero como sucede todo lo contrario, como el movimiento va siempre acompañado de resistencias pasivas, se vé que se comunica sucesivamente á la maza, una porcion notable de fuerza viva, ó del trabajo que esta fuerza viva supone, que se pierde enteramente.

He aquí por qué, tambien, é independientemente de otras razones, vale mas producir los efectos anteriores por simples presiones como se verifica en las máquinas de cilindros, de muelas &, que sustituyen con razon los buenos constructores á las mazas ó martillos.

Si es, pues, util: evitar los choques aun en el caso actual, con mucha mas razon lo será cuando estos choques no son necesarios p.ª producir el efecto deseado.

Esto es lo que tiene lugar, por ejemplo, cuando las piezas se separan y se unen bruscamente con velocidades finitas, bien sea que abandonen enteramente la máquina, ó bien que usan para comunicar el movimiento: cuando dejan mucho juego en sus articulaciones y experimentan cambios de velocidades en intensidad y en direccion, tales como las piezas que gozan de un movimiento alternativo &. Se evitan en parte estos efectos, disminuyendo en cuanto sea posible este juego, y empleando para transformar el movimiento continuo en otro alternativo, resortes, y aun mejor, manivelas y escéntricos que extinguen y restituyen gradualmente la velocidad al principio y al fin de cada oscilacion; disponiendo, en fin, las partes que trasmiten el trabajo por su contacto, y en general todas las piezas de la máquina de manera que esten rigorosamente sujetas en su trazado y en su movimiento, á la ley de continuidad.

El efecto de cualquier cambio brusco, es, ademas, hacer experimentar á las máquinas, sacudimientos que deterioran su constitucion, fatigando sus ensambladuras, desuniendo todas sus partes y aumentando el juego de sus diversas piezas; lo que produce, inevitablemente, un aumento progresivo de perdidas de trabajo. Otro tanto se puede decir, en general, de las fuertes presiones cuando experimentan frecuentes alternativas y repetidas por mucho tiempo, en direccion y en intensidad.

De la accion de los motores sobre las máquinas: influencia de la forma y de la velocidad del receptor.

25. Pasemos ahora á lo concerniente al termino Ff relativo á las cantidades de accion desarrolladas por las fuerzas motrices y observemos que los motores pueden ser primitivos, tales como la gravedad y el cálorico; ó secundarios, tales como los animales, el viento, las corrientes de agua y el vapor; ó, en fin, compuestos y materiales, tales como las manivelas, las diferentes ruedas hidráulicas, &c que constituyen las primeras piezas móviles de las máquinas, ó son los receptores inmediatos de la fuerza y del movimiento. No puede tratarse aquí del modo de obrar de los unos y de los otros; lo que importa observar es, que la presion F ejercida por el motor secundario sobre el receptor, es, en general, susceptible de variar con la velocidad propia v de esta pieza, de tal manera, que siendo nula para una velocidad de su punto de aplicacion, igual á la mayor velocidad V, que puede tomar libremente el motor, es, al contrario, la mayor posible, cuando el receptor está inmovil ó que $v = 0$.

Como la cantidad de accion Ff comunicada por el motor á la máquina, es nula para los casos estremos de que se trata, se vé claramente que habrá un valor de v comprendido entre 0 y V, que hará un máximo el producto Ff; esto parecerá evidente si se considera el modo de obrar de algunos de los motores secundarios, tales como los animales y el agua. Por otra parte,

para hacer Ff el mayor posible, habrá en cada caso particular que satisfacer ciertas condiciones; habria, principalmente que evitar los choques y toda descomposicion de la fuerza y de la velocidad del motor, que fuese perjudicial al efecto, ó hiciese crecer inútilmente la presion sobre los apoyos y las resistencias pasivas &; pero es imposible dar sobre esto reglas generales, y no es este el lugar á proposito para entrar en mas detalles.

Influencia de la forma y de la velocidad del operador sobre el efecto útil.

26. Nos queda que decir una palabra acerca de los terminos de nuestra ecuacion (22) concerniente á la inercia ó á las fuerzas vivas de la máquina, porque es evidente que se puede repetir respecto del efecto útil Qq lo que se ha dicho de las resistencias pasivas en general; asi se tendrá que examinar la velocidad, la forma & que convienen al útil ú operador para que produzca, para gasto igual de trabajo, el máximo de obra de una especie determinada; la esperiencia ha enseñado en efecto, que cada útil ofrece una velocidad que es la mas ventajosa posible, y de la que no se podrá separar sin caer en inconvenientes, ya relativos á la cantidad de los productos, ya á su calidad.

Pasando pues, á los terminos de las fuerzas vivas mv^2 y mv'^2 que poseen los diferentes cuerpos de la máquina al fin y al principio del intérvalo de tiempo en que se considera el movimiento, se observará que el uno tien-

de á disminuir, y el otro á aumentar el efecto Qq. Pero como las máquinas parten necesariamente del reposo y no adquieren mas velocidad que la que les comunica el motor, se vé que la cantidad de trabajo medida por la fuerza viva $\frac{mv'^2}{2}$, supone otra gastada primitivamente por el motor, y que es siempre superior á aquella, á causa de las resistencias pasivas que tuvo que vencer al desarrollarla; como inherentes á la constitucion de la máquina. En cuanto á la fuerza viva $\frac{mv^2}{2}$ que se presenta como una verdadera pérdida de trabajo, se podrá utilizar en parte hácia el fin del movimiento de la máquina, dejando obrar á esta sola y en virtud únicamente de la inercia contra las resistencias que presenta la materia que hay que confeccionar, lo cual, no obstante, no siempre lo permite la materia del trabajo y la clase del operador. Pero como en todos los casos absorverán las resistencias pasivas una porcion notable de ella, se vé que de todos modos hay siempre inconveniente en q.e adquiera cierta fuerza viva las diferentes piezas, aun prescindiendo de que la influencia de los choques y de las resistencias pasivas crece con el aumento de las masas y de la velocidad.

Sin embargo, si el movimiento de la máquina debe continuarse por mucho tiempo, la pérdida de trabajo representada por $\frac{mv^2}{2}$ resulta despreciable respecto al efecto útil total, y su influencia es nula comparativamente á la que ejerceria en el caso en que el movimiento de la máquina se interrumpiese por descansos frecuentes.

Se vé tambien que si el efecto útil consiste en elevar ó mover cuerpos en una direccion cualquiera, hay siempre cierta pérdida de fuerza viva ó de trabajo, cuando abandonan los cuerpos á la máquina con una velocidad adquirida; esta velocidad debe ser nula ó la menor posible.

En cuanto á las piezas que tienen un movimiento alternativo y cuya velocidad se estingue al fin y al principio de cada oscilacion, se vé fácilmente, que si varia esta velocidad por grados insensibles, su fuerza viva no producirá mas efecto que el de aumentar y disminuir periódicamente la mv^2 de la máquina; de manera, que resultará la misma al fin y al principio de cada oscilacion, y que no habrá, bajo este punto de vista, ninguna pérdida de cantidad de trabajo.

Circunstancias principales de las máquinas en movimiento.

Naturaleza particular del movimiento de las máquinas.

27. Despues de haber examinado aparte la influencia de los diferentes términos de la ecuacion de las fuerzas vivas (22) sobre el efecto util, vamos ahora á deducir de ella, las leyes del movimiento de las máquinas.

Las máquinas estan, en efecto, sujetas á ejecutar periodos de movimiento que se llaman vueltas ó revo-

luciones y, al cabo de las cuales, la posicion de las diversas masas es la misma que antes; ahora bien, como todas las piezas estan ligadas entre sí, la velocidad se comunica de una en otra por leyes puramente geométricas, de manera que la de los diversos puntos se puede espresar en funcion de la velocidad de uno cualquiera de ellos, y de la variable que fija su posicion en cada instante. La ecuacion de las fuerzas vivas daria, pues, esta velocidad en un instante cualquiera, si se conociesen las cantidades de accion totales que las diferentes fuerzas han comunicado al sistema hasta aquel instante, y bajo este punto de vista contiene implícitamente las leyes del movimiento de todas las máquinas.

Si se supone que parte el sistema del reposo, se hará $v'=0$, en la ecuacion del num.º 19

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv'^2 = 2\Sigma . \int Fdf - 2\Sigma Rdr - 2\Sigma . \int Qdq \pm 2PH$$

y dará el valor de la velocidad v de la masa cualquiera elemental m, pues que segun la naturaleza de las máquinas, las velocidades de las demas masas tienen con v relaciones dadas, y dependientes únicamente de las magnitudes que fijan la forma y la posicion de las diferentes partes del sistema en cada instante.

Si se quiere solamente considerar lo que sucede en el intérvalo de tiempo infinitamente pequeño dt, durante el cual, el incremento de velocidad de m es dv, correspondiente á los espacios elementales df, dr, dq, se tendrá, diferenciando la ecuacion anterior respecto del tiempo:

$$\Sigma\, mv\,dv = \Sigma\, F df - \Sigma\, R dr - \Sigma\, Q dq \pm P dH,$$

ecuacion que servirá para dar á conocer el aumento de velocidad que recibe en cada instante, uno cualquiera de los puntos de la máquina, y por consiguiente, la ley del movimiento.

Para demostrarlo, observaremos, que si se llama e el camino total descrito por una molécula en el instante en que su velocidad es u, y que ocupe una posicion determinada de la máquina de modo que $udt = de$; y, si se representa por φe en general, la funcion puramente geométrica que espresa la relacion de v y de dv relativos á otro punto cualquiera, con los valores designados por u y du, de suerte, que $v = u\varphi e$, $dv = du\varphi e$, se podrán reemplazar las cantidades $\Sigma\, mv^2$, $\Sigma\, mv'^2$ y $\Sigma\, mvdv$ por sus equivalentes

$$u^2 \Sigma\, m(\varphi e)^2,\ u'^2 \Sigma\, m(\varphi e')^2,\ udu\, \Sigma\, m(\varphi e)^2 = de \frac{d^2 e}{dt^2} \Sigma\, m(\varphi e)^2$$

en las ecuaciones anteriores que resultarán así, representando por K y K' los valores de $\Sigma\, m(\varphi e)^2$, $\Sigma\, m(\varphi e')^2$ relativos á las dos posiciones distintas que se consideran

$$Ku^2 - K'u'^2 = 2\,\Sigma \int F df - 2\,\Sigma \int R dr - 2\,\Sigma \int Q dq \pm PH$$

$$Kudu = K \frac{d^2 e}{dt^2} de = \Sigma\, F df - \Sigma\, R dr - \Sigma\, Q dq \pm P dH$$

y como df, dr, dq tienen tambien con de relaciones que son puramente funciones de e y de las constantes que fijan la magnitud y la posicion relativas de las partes materiales del sistema; y como F, R, Q se suponen constantes ó variables segun leyes dadas á priori en funcion del tiempo, ó de las variables f, r y q, es decir, de e, se vé que la última de estas ecuaciones dará por los méto-

dos conocidos, la ley efectiva del movimiento, de manera, que, reunida con la anterior, debe contener implicitamente todas las propiedades esenciales de las maquinas, tales como las miramos aquí.

Pero para que pueda suceder así, es preciso suponer que se tienen en cuenta todas las circunstancias que sobrevienen durante el trabajo de las fuerzas, y principalmente las que pueden, momentaneamente, suspender y modificar su accion y el movimiento de las diferentes partes materiales, como sucede, por ejemplo, en la accion de las mazas ó de los martillos, en que ciertas masas abandonan y hacen parte, alternativamente de la máquina; las integrales deben entonces tomarse en los distintos intérvalos que hay que considerar.

Del movimiento de las máquinas á partir del reposo.

28. En el instante en que sale una máquina del estado de reposo, el momento virtual Fdf del motor escede necesariamente al de todas las resistencias reunidas; es decir, que $Fdf - Rdr - \&c > 0$. Esto sucede ordinariamente porque la resistencia util Q está en el mínimo de su valor ó porque la presion motriz F está en el máximo del suyo (25). La fuerza viva aumenta así, en cada instante de una cantidad $d(mv^2) = 2\,mvdv$ igual al doble de las cantidades de accion instantáneas comunicadas por las potencias.

La fuerza viva continuará aumentando mien-

tras que el momento Fdf, ó el trabajo instantáneo del motor, sea mayor que el $Rdr + Qdq + \&$ de las diversas resistencias; pero es preciso admitir conforme á la esperiencia y á la naturaleza de las máquinas industriales que la fuerza viva no aumentara indefinidamente, al menos de un modo apreciable y llegará mas ó menos rápidamente, á su límite máximo para el cual se tendrá

$$\frac{1}{2} d(mv^2) = Fdf - Rdr - Qdq \pm PdH = 0$$

la que espresa, segun el principio de las velocidades virtuales, que hay equilibrio en el mismo instante entre las fuerzas motrices y las resistencias, hecha abstraccion de las fuerzas de inercia $-m\frac{dv}{dt}$ (14) de las diversas masas cuya suma de momentos virtuales, es naturalmente igual á cero.

En efecto, si la fuerza viva aumentase sin cesar, y sensiblemente en cada revolucion de la máquina, resultaria que la velocidad de una pieza cualquiera, por ejemplo, la del punto de aplicacion del motor, creceria igualmente, y llegaria bien pronto á un término en que este motor no seria capaz de ningun esfuerzo (25), circunstancia que no tiene lugar para las resistencias, porque sucede muchas veces que crecen con la velocidad.

Habiendo llegado á su máximo la fuerza viva y la cantidad de trabajo comunicada, podrá suceder, ó que permanezcan constantes, ó que disminuyan durante un cierto tiempo para volver á crecer en seguida, y así alternativamente; porque se supone siempre que el movimiento no cesa.

Del movimiento uniforme y de sus condiciones.

29. Consideremos desde luego el primer caso, que es el mas sencillo. Siendo nulo el aumento instantáneo 2mvdv de la fuerza viva así como la suma Edf, Qdq, &c de las cantidades de trabajo elementales comunicadas, habrá equilibrio en cada instante para todas las posiciones de la máquina, con entera abstraccion de las fuerzas de inercia; la velocidad resultará por consiguiente la misma para las mismas posiciones, y como se tendrá en dos instantes cualesquiera

$$mv^2 - mv'^2 = 2(Ff - Rr - Qq \pm PH) = 0,$$

la inercia no ejercerá ninguna influencia directa sobre la trasmision del trabajo.

El caso mas general, y mas comun á la vez en que pueden presentarse estas circunstancias, es aquel en que las diferentes masas del sistema poseen separadamente, velocidades constantes ó uniformes, porque no se concibe á priori, cómo podrían variar estas velocidades, de modo que el aumento de fuerzas vivas de ciertas piezas fuese constantemente igual á la disminucion semejante de todas las demás; lo que es necesario para que la suma de las fuerzas vivas permanezca constante. Además es evidente que las velocidades efectivas v, v', v'' ó (13 y 14) $\frac{de}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$, $\frac{de''}{dt}$ ... de las diferentes masas no pueden permanecer constantes, si las velocidades virtuales de, de', de'' que dependen únicamente de la natura-

leza geométrica de los enlaces del sistema no estan en relaciones invariables para todas las posiciones que pueda tomar. (*)

Esta condicion escluye enteramente, como se vé, las piezas que tienen un movimiento alternativo, pues que sus velocidades efectivas y sus velocidades geométricas ó virtuales, no podrian estar en relacion constante con las de las demás; pero no basta dicha condicion para asegurar la uniformidad del movimiento de la máquina, sino que es preciso aun, que se tenga en cada instante $Fdf - Qdq - Rdr \pm PdH = 0$ ó que haya equilibrio haciendo siempre abstraccion de las fuerzas de inercia: nueva condicion, que no podrá satisfacerse de un modo general, si la potencia y las resistencias obran por intérvalo, de un modo discontinuo; ó varian en intensidad y en direccion segun leyes cualesquiera, é independientes en las diversas posiciones de la máquina. Ahora, aun suponiendo las fuerzas F, R y Q constantes con la velocidad así como los ángulos que forman con la direccion de los caminos elementales descritos por sus puntos de aplicacion, condicion que hace constantes los momentos virtuales Qdq, Rdr, Fdf y que se halla satisfecha en muchas máquinas, será preciso además, que

(*) Sean K K'... estas relaciones constantes; de manera que se tenga $de' = Kde$, $de'' = K'de$, se tendrá, pues, tambien entre dos posiciones cualesquiera del sistema $e' = Ke$... $e'' = K'e$.., es decir, que los espacios enteros descritos entre estas posiciones por los diferentes puntos, estarán igualmente en las mismas relaciones

el peso p de cada pieza conserve (22) su centro de grave-dad á la misma altura; á no ser que teniendo una velocidad uniforme no haga parte de la potencia motriz ó de la resistencia util; porque en cualquier otro caso comunicará evidentemente cantidades de trabajo instantáneas $\pm pdh$ que serán variables para las diversas posiciones del sistema.

Segun lo que se ha dicho anteriormente, no puede entrar en la máquina ninguna pieza dotada de un movimiento alternativo; deberá pues componerse únicamente de piezas de rotacion ó de ruedas exactamente centradas (22), ó de correas y cadenas sin fin.

En la mayor parte de los casos no llega á ser el movimiento rigorosamente uniforme sino despues de un tiempo infinito.

30. Este examen puede servir para demostrar cuan dificil es establecer un movimiento rigorosamente uniforme en las máquinas, y aun se puede decir, que no se presenta jamás con toda la exactitud matemática; porque supone, no solamente que las fuerzas permanecen constantes en intensidad y en direccion, sino que las velocidades virtuales de las diferentes partes de la máquina, guarden entre sí relaciones independientes de la posicion del sistema, lo que exige que las cantidades representadas anteriormente por φe, así como las designadas por K sean constantes pa-

ra todas las posiciones. En fin, se demuestra muy fácilmente sea por la consideracion de la ecuacion

$K\frac{d^2e}{dt^2}=K\frac{dv}{dt}=\Sigma F\frac{df}{de}-\Sigma R\frac{dr}{de}-\Sigma Q\frac{dq}{de}$, en cuyo segundo miembro se supongan constantes $\frac{df}{de}$, $\frac{dr}{de}$, $\frac{dq}{de}$; sea por consideraciones directas de geometria, que cuando la accion de las diferentes fuerzas está sometida á leyes continuas análogas á las de la gravedad, y dependientes únicamente de las variables que determinan la posicion ó la velocidad del sistema, la velocidad no adquiere en general su límite sino al cabo de un tiempo infinito, aun cuando muchas veces al cabo de uno muy corto no se aparte de él sino una cantidad inapreciable, y que puede despreciarse en la mayor parte de los casos de la práctica.

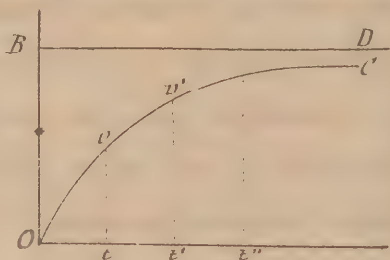
Basta para esto observar que segun las nociones anteriores la funcion representada por este segundo miembro tiene un mayor valor cuando la máquina parte del reposo ó que $v=0$, y que disminuye mas ó menos rápidamente á medida que la velocidad v aumenta, de manera que resulta completamente nula para un cierto valor finito de esta velocidad, lo que le supone implícitamente de la forma $N(a-v)^n$

ó cualquiera otra equivalente, siendo N una funcion esencialmente positiva de v y constantes, y a la velocidad límite de que se trata.

Se saca en efecto de la ecuacion colocada en último lugar $t=\int\frac{K\,dv}{N(a-v)^n}=K\int\frac{dv}{N(a-v)^n}$, integral que

segun las reglas conocidas y tomada desde $v=0$ hasta $v=a$, debe contener al menos un término de la forma $-A \log.(a-v)$ si n es impar; ó de la forma $-A(a-v)^{-n+1}$, si n es par; y estas funciones son susceptibles tanto una como otra, de hacerse infinitas cuando la velocidad v llega á su límite a.

Por consideraciones de geometria se llega á este mismo resultado. En efecto, si el punto O es uno de los de la máquina, al cual hay aplicada una fuerza motriz, la ley de su movimiento podrá estar representada por una curva OC, cuyas abscisas Ot, Ot'... representen los tiempos, y las ordenadas tv, t'v'... representen las velocidades.



Como se ha supuesto que las fuerzas están sometidas á leyes continuas, las velocidades aumentarán tambien desde el primer instante segun una ley rigorosamente continua; sus incrementos irán siendo cada vez menores (28); por consiguiente, la curva se irá alejando del eje de abscisas, pero tendiendo á confundirse con una recta BD paralela á este eje. Para que la velocidad llegue á ser constante ó uniforme, seria necesario que la curva se convirtiese en dicha recta: pero como una curva continua difiere esencialmente en su trazado geométrico y en su ley matemática, de los que corresponden á una línea recta, en rigor, nunca

podrá aquella degenerar en esta, aunque pueda aproximarse á ella indefinidamente; es decir, que la recta será una asíntota de la curva y por lo tanto, solo para un tiempo infinito sería constante el valor de la ordenada ó de la velocidad.

Sin embargo, segun ya se ha indicado en la práctica; el tiempo en que la velocidad llega á ser sensiblemente constante, es muy corto, y, tanto mas, cuanto se hayan procurado llenar mejor las condiciones que exige la uniformidad. En máquinas ó aparatos de pequeña masa, este tiempo suele ser aun mas corto, porque independientemente de otras circunstancias, el valor de la velocidad v segun se deduce de la ecuacion general (27) es tanto mayor al cabo de un tiempo dado, cuanto menores son las masas que entran en la máquina; luego con mas rapidez se acercará á su valor límite. Esto se observa en los para-caidas, en los que concurre además la circunstancia de crecer rápidamente la resistencia, y por eso muy pronto adquieren la velocidad máxima; pero conviene tener presentes las causas que influyen en la ley de estos movimientos para tomar las precauciones debidas en estos casos, en que por desconocer este régimen del movimiento pudieran correrse graves riesgos.

Observaciones análogas pueden aplicarse, por otra parte á las máquinas que por su constitucion y la de los motores ó resistencias no podrian adquirir

sino un movimiento periódico constante ó permanente, es decir, tal que la velocidad, aunque variable en la estension de cada revolucion, es constantemente la misma en las mismas posiciones.

Ventajas del movimiento uniforme.

31. La gran importancia que tiene el satisfacer en cada caso particular, si no rigorosamente, al menos todo lo que se pueda, á las condiciones propias para establecer la uniformidad del movimiento de las máquinas, se hará aun mas sensible comparando las ventajas inherentes á este movimiento con los inconvenientes que resultan del movimiento variable.

En las máquinas que poseen el movimiento uniforme y en que las potencias y resistencias obran de una manera continua, y con la misma intensidad de accion, las piezas se conducen siempre del mismo modo, y permanecen siempre en contacto sin esperimentar ningun sacudimiento perjudicial, ni ningun cambio brusco de velocidad: además, como las cantidades de trabajo elementales que cada una de ellas recibe y trasmite, son iguales y constantes, y estan, por consiguiente, en equilibrio en cada instante, del mismo modo que la máquina entera, las causas de destruccion son menores, y se pueden apreciar en cada caso los esfuerzos que sostienen; las flexiones que esperimentan y las mí-

nimas dimensiones que necesitan.

Pero estas ventajas no son de las mas importantes, á que dá lugar la uniformidad del movimiento; porque como existe para cada motor (25) una velocidad de su punto de aplicacion, que hace un máximo la cantidad de trabajo que comunica á la máquina; y que la calidad y cantidad de trabajo del útil dependen tambien (26) de su velocidad, y sobre todo, de la constancia de esa misma velocidad, se vé que el caso mas ventajoso posible será aquel en que las velocidades de las piezas estremas de la máquina sean las que exige cada clase de motor y de trabajo útil, y permanezcan, del mismo modo que las de las piezas intermedias, invariables durante todo el movimiento.

Inconvenientes del movimiento variado, aun cuando esté sujeto á la ley de continuidad.

32. En las máquinas en que varía el movimiento en cada instante, de un modo sensible, y segun leyes, que por otra parte son continuas, se verifica todo de una manera enteramente opuesta, sin contar los demás inconvenientes á que dan lugar algunas veces. Así, por ejemplo, podria suceder que no fuese posible ponerlas en movimiento ó continuarle, porque como la accion del motor y de las diversas resistencias es intermitente, habrá algunos instantes en que habiendo adquirido estas últimas toda su energia, se halle la

otra, por el contrario, en su mínimo y por consiguiente que no sea suficiente la fuerza viva que posee la máquina para mantener en estas posiciones el movimiento (posiciones que los prácticos conocen con el nombre de puntos muertos), aun cuando la cantidad de trabajo que pudiese suministrar el motor en una revolucion de la máquina, supuesta ya en cierto estado de movimiento, fuese igual ó aun superior á la que desarrollasen todas las resistencias juntas. Además, aun cuando el movimiento se pudiese originar y mantener; la máquina, en virtud de su estado variable, no trabajaria bajo las condiciones mas ventajosas posibles, y sus diferentes piezas esperimentarian sacudimientos, presiones y tracciones que alterarian más ó menos rápidamente su constitucion, y absorverian en pura pérdida una porcion de trabajo motor (18).

Medios de corregir en parte los inconvenientes del movimiento variado.

33. Se observará que estos últimos inconvenientes aun que análogos á los que se han indicado ya en el nº 24, son, sin embargo, menores atendiendo á que aquí suponemos que el juego de las diversas articulaciones, es muy pequeño, y que el trazado y disposicion de todas las partes, está conforme á la ley de continuidad; de manera que las piezas que gozan de un movimiento alternativo, inherentes á la constitucion de la maquina, amortiguan gradualmente su velocidad al fin

y al principio de cada oscilacion.

Para concebir bien los inconvenientes que se presentan en el caso actual y poder siempre remediarlos cuando llegue la ocasion, es preciso considerar que tienen lugar, ya porque la potencia motriz obra sobre la primera pieza (el receptor) tan pronto en un sentido como en el directamente opuesto, ya porque existan en la máquina pesos ó resortes, que tienden á comunicarla, de una manera activa, cierta velocidad, bien en el sentido del movimiento ó bien en el opuesto; resulta de aquí, en efecto, que la pieza que conducia á otra, puede á su vez ser conducida por ella, y que á causa del juego indispensable que tiene que existir, estas piezas cesan de estar en contacto, ó se separan para volverse á tocar en seguida, y así alternativamente.

Necesidad de separarse en ciertos casos de las condiciones de la uniformidad del movimiento.

34. Segun estos varios inconvenientes del movimiento variable de las máquinas, parece que se deberia desechar su uso en todas las aplicaciones de la industria, y limitarse únicamente á los medios que permitan la uniformidad rigorosa del movimiento; lo que se reduce, segun hemos visto anteriormente, á no emplear ni aun para el receptor y el util, sino piezas de rotacion continua, desechando toda accion intermitente de parte del motor y de las resistencias. A esto

tienden, en efecto, todos los esfuerzos de los buenos construc-
tores y de los mecánicos instruidos; pero aun cuando se ha
resuelto la cuestion bastante aproximadamente para
muchas máquinas, no hay esperanza de que pueda
hacerse lo mismo para todas. La naturaleza del
motor y del trabajo, muchas veces las circunstancias
locales, y principalmente la demasiada sugecion en la
ejecucion material, y el demasiado gasto, se opondrán
siempre al logro del objeto de un modo satisfactorio.
Pero, al menos, se debe tratar en cada caso particular,
de aproximarse á él lo mas que sea posible, evitando
los principales inconvenientes que acabamos de indi-
car del movimiento variable.

Ahora observarémos que, en realidad, solo exis-
ten tres causas esenciales del movimiento variado de
las máquinas, que consisten en la irregularidad de
accion, ya del motor, ya de la resistencia útil, ya,
en fin, de una y otra reunidas; no habrá, pues, tam-
poco, sino tres circunstancias en que haya necesidad
de hacer uso de piezas dotadas de movimiento alterna-
tivo; y en estas tres circunstancias se deberá siempre evi-
tar el multiplicar inutilmente estas piezas. Asi, de-
biendo el receptor poseer un movimiento alternativo, y
el operador uno de rotacion contínuo y uniforme,
se trasformará inmediatamente por medio de mo-
nivelas, excéntricos &c el primer movimiento en el
segundo; todas las piezas intermedias serán asi, ruedas
y poleas de movimiento contínuo. Otro tanto se hará

cuando, por el contrario, deba ser el receptor el que tenga un movimiento uniforme y el útil uno alternativo: pero si ambos deben poseer á la vez un movimiento alternativo, habrá que examinar si se puede aplicar inmediatamente el primero al segundo sin interposicion de ninguna pieza; de manera que coincidan perfectamente las oscilaciones y los cambios de accion; y que se amortigüen por grados hácia el fin y al principio de cada una de ellas, la velocidad y la presion; porque entonces no podrá haber pérdida sensible de efecto y la máquina trabajará casi tan ventajosamente como si poseyere el movimiento uniforme: pero esto sucede rara vez, y casi siempre hay necesidad de emplear piezas intermedias, á las que se dá entonces un movimiento de rotacion continuo en el mismo sentido cuando hay alguna ventaja en regularizar la accion.

Medios generales de regularizar el movimiento en las máquinas.

35. Dejando á un lado el caso en que todas las piezas tienen un movimiento alternativo no habrá mas que ocuparse de los otros tres, á los que se podrá agregar aquel en que todas las piezas móviles tuviesen un movimiento de rotacion contínuo, aun cuando la potencia y la resistencia obrasen de un modo variable ó intermitente sobre la primera y la última de estas piezas. Ahora bien, en todos estos casos, pero sobre todo,

en el que es ventajoso (31) que una de estas piezas estremas posea la velocidad uniforme, parece conveniente regularizar lo mas que sea posible, el movimiento de la máquina; y lo que precede nos indica los medios principales: 1.º Se trazarán las partes por las que se trasmite de una pieza á otra el movimiento de rotacion continuo; de tal modo, que la velocidad geométrica permanezca en una relacion dada, lo que constituye verdaderamente el problema de los engranages tomado en toda su generalidad. 2.º Se centrarán (22) exactamente las ruedas, lo que tendrá además la ventaja de anular el efecto de la fuerza centrífuga ó la presion que de ella resulta sobre los ejes. 3.º Se pondrá del mismo modo en equilibrio el peso de las piezas de movimiento alternativo, ó se hará concurrir este peso, si ha lugar, á regular la accion de la potencia y de la resistencia en cada posicion del sistema. 4.º Se disminuirá todo lo que sea posible la velocidad, la amplitud del movimiento y las masas de estas mismas piezas, en tanto que lo permita su solidez y el uso á que se las destina: 5.º En fin, se regularizará la accion del motor ó de la resistencia por pesos ó por cualquiera otra disposicion que pueda resultar del examen de cada caso particular; por ejemplo, si el efecto de una ú otra de estas fuerzas se compone de efectos parciales iguales, separados y repetidos muchas veces en una misma revolucion de la máquina, convendrá distribuirlos de modo que se sucedan por intérvalos regulares, y en cierto

modo; sin discontinuidad, ó que los mayores esfuerzos de los unos tengan lugar al mismo tiempo que los menores de los otros &.

Apurados todos estos medios y corregidas por lo tanto, en cuanto es posible, todas las causas de irregularidad, queda aun otro recurso que vamos á dar á conocer, atendiendo á que se refiere á las leyes generales del movimiento de las máquinas, cuya discusion hemos abandonado por un instante.

Influencia de las piezas de movimiento alternativo: medios particulares de disminuirla ó de corregirla.

36. Llamemos en general w la velocidad angular, ó á la unidad de distancia de una de las piezas de rotacion de la máquina: su fuerza viva tendrá por espresion

$$\int dm v^2 = \int dm\, w^2 r^2 = w^2 \int r^2 dm$$

siendo r la distancia al eje de una molecula material cualquiera; dm la masa; e $\int r^2 dm$ el momento de inercia de la pieza; la fuerza viva total de que van animadas en un instante dado las piezas semejantes, y en general, todas las que tienen velocidades continuas en relaciones dadas (29), se podrá representar por Aw^2, siendo A una constante dependiente de las relaciones de las velocidades y de los momentos de inercia de las piezas. En cuanto á la suma de las fuerzas vivas de las piezas de movimiento alternativo, continuaremos representándola por la espresion general Σmv^2,

ó abreviadamente por mv^2 (21), de suerte que las ecuaciones del número 27 darán para determinar en cada instante la velocidad angular w,

$$Aw^2 = 2\left(Ff - Qq - \mathfrak{S} - \frac{mv^2}{2}\right); \quad Aw\,dw = Fdf - Qdq - \mathfrak{S} - mvdv.$$

El efecto de las piezas de movimiento alternativo limitándose así á disminuir el trabajo elemental Fdf comunicado en cada instante por las potencias, de una cantidad variable $mvdv$, se podrá representar este efecto por el de una fuerza $\varphi = m\frac{dv}{dt}$ que no es mas que la resultante general de las fuerzas de inercia tangenciales relativas á estas piezas, y comprender esplícitamente esta fuerza cuya cantidad de trabajo instantánea, es prescindiendo del signo $-mvdv = \varphi de$, en el número de las fuerzas que solicitan realmente la máquina y que son estrañas á la inercia.

Se observará por otra parte que, pues que la velocidad v de las piezas de que se trata, se hace nula al fin y al principio de las oscilaciones de cada una de ellas, sucederá lo mismo con la cantidad de trabajo φde ó $mvdv$ que desarrolle su inercia, lo cual supone que φde es tan pronto positivo como negativo, ó que la fuerza φ relativa á una misma pieza, restituye ó destruye constantemente en cada semi-oscilacion, cantidades de trabajo iguales y que no alteran por lo tanto el efecto util de la máquina. Bajo este punto de vista se puede, pues, asemejar la accion de esta fuerza á la de gravedad (22) sobre las piezas de movimiento alternativo: de-

suerte, que los medios de corregir su influencia son enteramente análogos: así, independientemente de los que se han indicado ya en el núm.º 35, se podrá oponer á la masa de estas piezas, otras masas dotadas de un movimiento oscilatorio, precisamente contrario; es decir, tal que el aumento $2mvdv$ de su fuerza viva, sea en cada instante igual, aunque de signo contrario al relativo á estas mismas piezas; del mismo modo se podrian aun disponer los periodos de movimiento de modo que la fuerza Q que reemplaza su efecto, destruya en parte la irregularidad de accion de las potencias y de las resistencias. Pero estos diversos medios, aun cuando no deben despreciarse en cada caso particular, rara vez son aplicables con sencillez: generalmente se prefiere aumentar la inercia de algunas de las piezas de rotacion de la máquina conforme á los principios que vamos á esponer.

37. Volvamos á los razonamientos del número 28. Resultará de las ecuaciones anteriores: 1.º que cuando una máquina parte del reposo la velocidad que adquiere al cabo de un cierto tiempo, es tanto mayor, cuanto mayor es la cantidad de trabajo comunicada por las diferentes fuerzas, y cuanto menor es, por el contrario, la cantidad A únicamente relativa á los momentos de inercia y á las relaciones constantes de las velocidades geométricas de las piezas de rotacion: 2.º que el incremento instantáneo $d\omega$ de

velocidad en una época cualquiera del movimiento es directamente proporcional á la cantidad de trabajo elemental comunicada en el mismo instante, é inverso de la velocidad adquirida w y de la cantidad constante A.

La velocidad w creceria, pues, sin cesar en cada revolucion, si, como ya hemos esplicado (28), no llegase muy pronto, al menos sensiblemente, la suma de las fuerzas vivas del sistema á un límite absoluto que no puede esceder, segun la misma naturaleza de los motores y de las resistencias.

Llegada ya la máquina á este estado de movimiento, la fuerza viva Aw^2 y la velocidad w no podrán variar, sea en una misma vuelta, sea de una vuelta á otra, sino entre límites mas ó menos cortos y relativos á las variaciones mismas de la cantidad de accion total $Ff - Qq - \mathcal{S}$, que se le haya comunicado en los intervalos correspondientes á estas vueltas ó revoluciones. Asi, estas diversas cantidades, llegarán sucesiva y simultáneamente á su valor máximo, despues á su mínimo y en cada uno de ellos habrá equilibrio entre todas las fuerzas consideradas (36) atendiendo á que se tendrá

$$Aw\,dw = Fdf - Qdq - Rdr \pm Pdh - mvdv = 0$$

Ahora bien, cualquiera que sea la ley segun la cual varie la intensidad absoluta de estas fuerzas con tal que no sea enteramente irregular, y que pueda determinarse, ya por el cálculo ó ya por la espe-

reincia, la cantidad de trabajo comunicada entre los instantes en que la velocidad w relativa á una misma vuelta ó á muchas vueltas sucesivas, llega á su mayor ó á su menor valor absoluto, se tendrá siempre la facultad de aproximar el movimiento de las piezas de rotacion de la máquina á la uniformidad, tanto como se quiera.

Modo general de regularizar el movimiento de las máquinas.

38. Para conseguirlo se dispone sobre uno de los ejes de rotacion, una especie de rueda ó anillo dotado de una gran velocidad, que se llama volante, y que por su inercia absorve, ó almacena, como se dice, el trabajo escedente del motor convirtiéndole en fuerza viva cuando hay aceleracion de movimiento para restituirlo en seguida en sentido contrario de las resistencias, cuando el movimiento se retarda, ó que su fuerza viva disminuye. Segun lo que precede, será facil examinar la influencia de estas piezas y dar reglas para su establecimiento.

Llamemos, en efecto, w la velocidad angular del eje del volante, y r la distancia al eje de una cualquiera de las masas elementales dm, que le componen; la fuerza viva de dm será $dm\,w^2r^2$ y la de todas las piezas del volante será

$$w^2\int r^2dm$$

espresion en que $\int r^2dm$ es el momento de inercia

de la masa entera.

Tomando por otra parte, w por la velocidad á que se refieren todas las de las diferentes partes del sistema y que hemos designado anteriormente por u (25), nuestra ecuacion fundamental resultará, separando el término de las fuerzas vivas concerniente al volante de que se trata,

$$\int r^2 dm\,(w^2 - w'^2) = \Sigma\, w'^2 \int dm\; \overline{\varphi e'}^2 - \Sigma\, w^2 \int dm\; \overline{\varphi e}^2 + 2\Sigma \int F df - 2\Sigma \int R dr - 2\Sigma \int Q dq.$$

Segun lo que hemos visto anteriormente, la constitucion de las máquinas permite, en general, calcular los valores de w para cada una de las posiciones sucesivas del sistema, y por consiguiente se puede tambien por una discusion conveniente, reconocer à priori, entre estas posiciones las que se refieren al menor y mayor de los valores que puede adquirir w, ya en una misma revolucion, ya despues de muchas revoluciones sucesivas al cabo de las cuales vuelve la velocidad, segun hipótesis, á ser periódicamente la misma. Supongamos, por otra parte, que sea w este mayor valor y w' el menor, representando por A el momento de inercia del volante, observando que A puede tambien comprender, si se quiere, el momento de inercia de todas las piezas materiales susceptibles de tomar un movimiento uniforme y cuya velocidad esté en una relacion invariable con w, de modo que φe sea constante é igual á $\varphi e'$ para todas las posiciones de estas mismas piezas: llamando, en fin,

$$\Sigma \int dm\; \overline{\varphi e}^2 = B,\quad \Sigma \int dm\; \overline{\varphi e'}^2 = B',\quad \Sigma \int F df - \Sigma \int R dr - \Sigma \int Q dq = S\,.$$

funciones cuyos valores relativos á los límites w y w' son-

prendidos entre estos límites pueden por hipótesis calcularse ó determinarse à priori, se tendrá la relacion

$$A(w^2-w'^2)+Bw^2-B'w'^2=2S$$

por cuyo medio se podrá siempre determinar la cantidad A de modo que la diferencia $w-w'$ entre la mayor y la menor de las velocidades angulares del volante, sea una fraccion n tan pequeña como se quiera de la velocidad angular media $\frac{w-w'}{2}$

Haciendo en efecto $w-w'=d$, $\frac{w+w'}{2}=\Omega$, de donde $w=\Omega+\frac{d}{2}$, $w'=\Omega-\frac{d}{2}$; como $\frac{d}{\Omega}=n$ ó $d=n\Omega$ será: $w=\frac{\Omega}{2}(2+n)$, $w'=\frac{\Omega}{2}(2-n)$ y la ecuacion anterior dará $\frac{\Omega^2}{4}A(4\times 2n)+B\frac{\Omega^2}{4}(2+n)^2-B'\frac{\Omega^2}{4}(2-n)^2=2S$ y por consiguiente $A=\frac{S}{n\Omega^2}-B\left(\frac{2+n}{8n}\right)^2+B'\left(\frac{2-n}{8n}\right)^2$

funcion que permitirá calcular el valor de A ó del momento de inercia del volante siempre que $n=\frac{d}{\Omega}$ esté dado à priori, asi como la velocidad angular media Ω de este volante.

Esta misma funcion demuestra por otra parte que si se trata de disminuir lo mas que sea posible el valor de A, y por consiguiente las dimensiones y el peso del volante, que ocasionan siempre un aumento de gasto ó de resistencias perjudiciales, será preciso: 1.º Aumentar convenientemente Ω ó la velocidad media de estabilidad: 2.º disminuir por medio de una reparticion ó disposicion convenientes en el modo de obrar de las fuerzas, la diferencia S entre sus cantidades de trabajo consideradas para el intérvalo en que la velocidad w

llega á su mayor y menor valor, &: 3.º, disminuir en cuanto lo permitan la solidez y la constitucion de la máquina, las cantidades B y B' análogas á los momentos de inercia y que se refieren á las masas de las piezas del sistema, dotadas de un movimiento oscilatorio ó alternativo.

(a) En efecto, aunque los signos de estas dos cantidades parecen indicar que influyen de una manera contraria respecto al valor de A, nada tiene esto de estraño, segun lo que hemos hecho observar (36) acerca de la influencia de las piezas de movimiento alternativo, porque á veces las fuerzas vivas de algunas de estas piezas podrán contribuir á regularizar el movimiento general en ciertos instantes, y por consiguiente á disminuir las dimensiones del volante destinado á este efecto; pero en los mismos instantes podrá haber otras piezas cuyos periodos de movimiento sean inversos á los de las primeras y contribuirán á hacer mas irregular la velocidad, y á que sea necesario aumentar las dimensiones del volante que hubiese de atemuar su influencia. En otros periodos ú oscilaciones de cada una de estas piezas sucederá lo inverso; y como para el intérvalo de tiempo á que se refiere la ecuacion anterior, se habrán reproducido, en general, un cierto número de periodos ú oscilaciones diferentes para cada pieza, no pudiendo disponerse estas

de manera que se neutralicen sus cambios de fuerza viva entre sí, lo que debe procurarse es hacerlas poco influyentes en el sistema, disminuyendo sus masas y la amplitud de sus oscilaciones, es decir, los valores de B y B'.

En cuanto al mayor valor que se puede atribuir á $n = \frac{2(w-w')}{w+w'}$ sin que cese el movimiento de ser periódico ó aun posible, es evidentemente el relativo al caso en que se tuviera $w'=0$, y $n=2$, porque no se puede suponer w negativo si la máquina debe continuar caminando en el mismo sentido.

Teoria y propiedades de los volantes: condiciones generales de su establecimiento.

39. Para aproximar á la uniformidad el movimiento de una máquina tanto como se quiera, no es necesario aumentar á la vez la velocidad y el momento de inercia de todas las piezas, lo que tendria ademas graves inconvenientes y aumentaria las resistencias pasivas. Se hace esto únicamente con una de las piezas de rotacion, que se llama volante, y que se ha tenido cuidado de colocar sobre un eje de gran velocidad, y lo mas próximo posible á la fuerza cuya accion importa regularizar. (33) Tambien se emplean algunas veces dos volantes cuando el motor y la resistencia obran ambos de un modo irregular. Cada uno está entonces destinado separadamente á hacer uniforme la fuerza cerca de la cual

se coloca.

En todo caso conviene que el volante asegure la uniformidad de velocidad de su eje independientemente de la inercia propia de las piezas de rotacion que no estan interpuestas directamente entre él y la fuerza cuya accion debe regularizar, condicion que tiende por otra parte, á simplificar el problema de su establecimiento.

Como el peso de los volantes produce un aumento de rozamiento sobre los ejes, conviene hacerlos tan ligeros como sea posible, conservandoles, sin embargo, su energia que es proporcional (36) á su fuerza viva $w^2 \int r^2 dm$. Esto se consigue dando una gran densidad á la materia de que se componen, y acumulando su masa á bastante distancia del eje de rotacion.

No es este el lugar de entrar en detalles sobre la construccion y el calculo de los volantes, nos limitaremos únicamente á observar que su funcion consiste, segun lo que se acaba de decir, en convertir en fuerza viva ó en almacenar, segun la espresion admitida, cierta porcion del trabajo motor cuando la energia de las potencias excede á la de todas las resistencias, ó aumenta la velocidad del movimiento y en convertir despues esta misma fuerza viva en trabajo empleado en vencer las resistencias, cuando el movimiento se debilita en virtud de la preponderancia de estas últimas sobre las potencias. Estas propiedades de los volantes, son las que han motivado el nombre que se les dá algunas veces de depósitos de fuerza viva ó de trabajo: son preci

cipalmente preciosas cuando podrian resultar de la irregularidad en el movimiento, pérdidas de trabajo ú otros inconvenientes cualesquiera (32 y 33); pero es preciso no olvidar que siempre introducen en la máquina nuevas causas de resistencia, pérdidas de fuerza viva (26) que deben hacerlos desechar en muchas circunstancias. Por ejemplo, el empleo de un volante, ó en general, todo aumento dado á los momentos de inercia superior al que es estrictamente necesario, sería mas perjudicial que ventajoso en las máquinas que poseyesen por sí mismas un movimiento uniforme, ó suficientemente uniforme; en las que fuesen susceptibles de detenerse frecuente y repentinamente; en fin en todas aquellas en que la constancia de la velocidad fuese perjudicial y aun peligrosa.

Necesidad y ventajas de regularizar lo mas que sea posible el movimiento independientemente del empleo del volante.

40. Por medio de esta discusion se vé cuan importante es tratar de regularizar la accion de las fuerzas, independientemente del volante, y aun cuando sea necesario tener que recurrir á él; porque siendo el valor de S, que debe entrar en la ecuacion del número 38, muy pequeño, no habrá necesidad de dar á este volante las dimensiones y la velocidad que deberia recibir en la hipótesis contraria.

Hemos indicado anteriormente algunos medios generales para conseguir este objeto; y en cada caso particular podran ofrecerse otros: pero la condicion mas importante, es arreglar la intensidad absoluta de la potencia y de la resistencia útil, de modo, que las cantidades de trabajo que desarrollan sobre la máquina, supuesta ya en un estado dado de movimiento, sean constantemente iguales para cada revolucion, ó al menos, para cada dos ó tres revoluciones; á fin de que no adquiera la cantidad S valores demasiado grandes, ó que la fuerza viva y la velocidad, si no pueden ser constantes, estén al menos comprendidas entre límites fijos, y sean periódicamente las mismas al cabo de un tiempo dado; tomando así lo que se llama un régimen de estabilidad. Como los medios que se emplean para llegar á este objeto, se refieren á la cuestion de establecimiento de las máquinas, creemos deber reasumir aquí sucintamente las condiciones principales, y trazar en pocas palabras la marcha que se sigue ordinariamente en la práctica, para llegar á una solucion, si no rigorosa, al menos suficientemente aproximada: con lo que terminaremos estas consideraciones generales sobre las máquinas.

Del establecimiento de las máquinas industriales.

La cuestion del mejor establecimiento de las máquinas no es susceptible de una solucion general rigorosa: hay siempre necesidad de descomponerla.

41. Hemos dicho yá que las condiciones esenciales de semejante establecimiento consisten en hacer el efecto útil ó la cantidad de obra confeccionada, un máximo, y el gasto en trabajo motor y en dinero un mínimo; de suerte que la unidad de obra de cada especie se obtenga al menor precio posible.

Para tratar esta cuestion en toda su generalidad, seria preciso ser dueños de hacer variar á la vez todos los datos de que depende, en las relaciones, que ligan el efecto util al efecto gastado; pero aun prescindiendo del coste, en dinero, que cambia segun los tiempos y las localidades, no se puede abordar así la cuestion del establecimiento de las máquinas. Se debe descomponer en otras muchas, para tratarlas aparte: así se estudia sucesivamente la accion de los motores sobre los receptores; la de los operadores sobre la materia que hay que confeccionar &: despues se viene á las piezas materiales, que sirven simplemente para comunicar el movimiento.

La esperiencia y el cálculo han enseñado que estas últimas piezas ejercen en general poca influencia sobre la cantidad de accion que trasmiten, y

en que se estan demasiado multiplicadas: en una palabra, la cantidad de trabajo que absorven las resistencias pasivas inherentes á estas piezas, es ordinariamente una fraccion bastante pequeña de la que reciben del receptor.

No sucede así con las pérdidas de trabajo que tienen lugar sobre el receptor y sobre el útil: estas forman, como veremos, casi siempre una fraccion considerable del valor absoluto y económico del motor: he aquí porqué, en la cuestion del establecimiento de las máquinas, lo que mas importa es la eleccion de estas dos piezas extremas; y como la clase de trabajo está siempre determinada, se procede primeramente á la eleccion del operador.

Eleccion del operador y del receptor de las máquinas: sus cualidades esenciales.

42. Debiendo considerarse el operador y el receptor como verdaderas máquinas sometidas á una potencia y á ciertas resistencias, todo lo que hemos dicho de las máquinas, en general, puede aplicárseles inmediatamente: así, dejando á un lado el precio de estos agentes, que rara vez se suele tomar en consideracion, atendiendo á que siempre es una pequeña fraccion del trabajo motor considerado durante un tiempo suficientemente largo: se podrán de antemano fijar las condiciones esenciales de un establecimiento, y motivar, en defecto de experiencias directas, la eleccion que debe

hacerse, ó la preferencia que debe darse á unos sobre otros. Por ejemplo, hemos hecho ya observar que el mejor operador y el mejor receptor, son aquellos en que la potencia y la resistencia obran continua y uniformemente, sin sacudimientos y sin choques: lo cual conviene principalmente á las piezas de movimiento de rotacion uniforme al rededor de un eje fijo: es preciso ademas que el receptor absorva completamente toda la cantidad de trabajo de que es capaz la fuerza motriz en un tiempo dado; y que en el operador, el desperdicio de la materia sometida á su accion sea el menor posible; y que el producto tenga el grado de perfeccion que se desea, &.

Si el operador y el receptor no estuviesen sometidos á ninguna resistencia pasiva, utilizarian segun las condiciones anteriores, del modo mas conveniente toda la cantidad de accion desarrollada por la fuerza motriz, que se les aplica, ó producirian el maximo efecto absoluto. Pero jamas sucede esto en la práctica, sino que, por el contrario, muchas veces, como lo hemos explicado ya, (34) hay precision de renunciar á las condiciones de uniformidad del movimiento; de donde se sigue que no pudiendo hacer que el operador y el receptor produzcan el máximo efecto absoluto hay que limitarse á hacer su trabajo útil un máximo relativo. Es preciso, en efecto, recordar que (26) cualquiera que sea la constitucion de semejante agente, sus dimensiones, su forma y su velocidad,

ejercen una influencia notable sobre el trabajo trasmitido; de suerte que hay que buscar en cada caso las combinaciones que ofrecen mas ventajas reunidas. La esperiencia y el cálculo han conducido ya á algunos resultados preciosos, relativos á los receptores, pero queda aun mucho que hacer respecto de los útiles y operadores.

Idea general del modo de proceder al establecimiento de las máquinas: medios de arreglar el trabajo del útil.

43. Si se conociesen las condiciones del mejor efecto, y la relacion de la cantidad de trabajo trasmitida á la cantidad de trabajo absoluta para cada motor, cada receptor y cada útil, se estaria en el caso de escojer combinando estos datos con los que son estraños á la mecánica, el receptor y operador que presentasen el mayor número de ventajas posibles en cada caso particular, y para cada localidad, y no presentaria ya grandes dificultades el establecimiento de las máquinas, porque arregladas ya, la velocidad, la forma y las dimensiones relativas de estas primera y última piezas, estaria casi determinada la eleccion de las piezas intermedias, sus relaciones de magnitud, de posicion y de movimiento; pues que servirian de guia para esta eleccion los preceptos generales que preceden, y las tablas de las diversas transformaciones del movimiento.

Quedaria, en seguida, que regularizar la ac-

cion del motor y de la resistencia útil; es decir, propor cionar los efectos ó el trabajo de modo (40) que se asegurase la permanencia del movimiento, y su uniformidad si es posible.

Es preciso suponer conocida la cantidad de materia que hay que confeccionar ó la obra que tiene que producir la máquina en un tiempo dado, así como el número de revoluciones de la máquina; y que se trata en su consecuencia de arreglar la marcha de las operaciones y el trabajo del motor. La condicion mas esencial á qué hay que satisfacer es la de disponer las cosas de manera que se presenten á la accion del útil ó del operador, cantidades iguales de materia, sino en cada instante y continuamente, lo cual seria aplicable á los útiles de rotacion; al menos en cada una de sus diversas revoluciones; de manera que haya el menor intervalo posible entre las cargas, y que se pierda el menor tiempo posible. Resultará así que si se aplica al operador una potencia capaz de vencer todas las resistencias que se le oponen, deberá desarollar cantidades de trabajo iguales, si no en cada instante, al menos en cada revolucion, de manera que las variaciones de velocidad estarán comprendidas entre límites fijos, y no muy extensos.

Estas condiciones estan ordinariamente satisfechas en todas las buenas máquinas, ya por los agentes encargados de la vigilancia y la direc-

cion del trabajo ya por medio de disposiciones particulares inherentes al operador mismo, que hacen variar la cantidad de materia, que les está sometida proporcionalmente á la velocidad, ó á la energía del motor; el charlatan de los molinos harineros, y el pie de cabra de las sererias de madera. Son verdaderos reguladores de esta clase. El primero suministrando una cantidad de grano constante á la accion de la piedra; y el segundo haciendo avanzar la pieza de madera en porciones siempre iguales, bajo la accion de la sierra.

Medios de calcular y de arreglar las cantidades de trabajo del motor.

44. Sucede, sin embargo, algunas veces que no se puede regularizar así la accion del operador, ya porque las sobrecargas de materia ocasionan interrupciones mas ó menos frecuentes y mas ó menos largas, ya porque la resistencia que opone la materia, no es constante; pero entonces es preciso al menos tratar de encerrar en límites bastante estrechos las desigualdades, y de modo, que las cantidades de trabajo que se gasten en cada unidad de tiempo no se separen nunca demasiado del valor medio deducido de un cierto número de revoluciones del operador.

En todos los casos en que resulten de esta desigualdad de accion graves inconvenientes para la

máquina, se recurre como lo hemos visto (34) al empleo de un volante que se coloca lo mas cerca posible del operador, y que en virtud de su inercia, sirve para mantener la uniformidad del movimiento del eje á que está aplicado siempre que la potencia que obra tangencialmente por hipótesis (34. 35) á la circunferencia de la rueda motriz montada sobre este eje, desarrolle en ella y en cada unidad de tiempo, cantidades de trabajo iguales á la media de que se acaba de hablar anteriormente: media que debe suponerse dada por el cálculo ó la experiencia, así como la velocidad sensiblemente constante del punto de aplicacion de la fuerza motriz. Dividiendo, pues, esta cantidad de trabajo por la velocidad, es decir, por el camino que recorre uniformemente el punto de que se trata, se tendrá tambien (9) el valor del esfuerzo que debe ejercer la potencia para vencer todas las resistencias que se le oponen, valor que generalmente se separará poco del verdadero; y que se podrá sin error sensible sustituir en vez de él, en todos los cálculos relativos á la investigacion de los efectos de la máquina.

Ahora, si se consideran unas despues de otras, todas las diferentes piezas interpuestas entre el receptor y el operador, piezas que por hipótesis están todas dotadas de un movimiento de rotacion sensiblemente uniforme, y en que puede despreciarse la influencia de la inercia; de modo que las po-

tencias y las resistencias esten constantemente en equilibrio; (29) si se consideran, digo, unas despues de otras estas piezas ó máquinas simples, será facil calcular sucesivamente, y por las teorias que expondrémos mas adelante las intensidades medias de las fuerzas de que se trata; y por consiguiente la cantidad de trabajo que deberá trasmitirse al receptor, en cada revolucion, ó en cada unidad de tiempo, para vencer á la vez todas las resistencias reunidas, y suponiendo que se haya asegurado convenientemente la constancia de su movimiento por medio de un nuevo volante, si es necesario (40).

Asi finalmente, pues que se supone conocida la teoria de los receptores y de los motores, se podrá determinar á su vez la cantidad de trabajo absoluto que deberá desarrollar este último en la unidad de tiempo ó en cada revolucion de la máquina, y no se tratará mas que de arreglar en virtud de esto, su intensidad de accion; lo que se conseguirá por medios análogos á los que sirven para arreglar el trabajo del operador; por ejemplo, levantando convenientemente la compuerta que suministra el agua á la rueda hidráulica, la llave que provee de vapor á las máquinas de esta clase &. Estas operaciones las ejecutan los hombres encargados del cuidado de la máquina, y algunas veces se emplean disposiciones particulares para que la intensidad de la fuerza motriz, siga naturalmente las variacio-

nes. de la resistencia y mantengan constante el movimiento; tal es mas particularmente el péndulo cónico ó regulador de fuerza centrífuga cuya teoria expondremos en la siguiente seccion.

(a) Para mostrar una aplicacion de este procedimiento general de resolver el problema del establecimiento de las máquinas propongámonos establecer un molino harinero en una localidad, en que se dispone de un motor hidráulico y en que se trata de moler cuatro hectólitros de grano por hora ó sean 300 Kil.s

Como suponemos hecho el estudio de los diversos operadores, que llenan mejor las condiciones expuestas en el núm.o 42, é igualmente el de los receptores, haremos uso en este caso de los resultados que, tanto de este estudio como de la experiencia, se han deducido y que se han resumido en parte, en los cuadros insertos al final de esta obra.

Consultando el relativo á los operadores, admitiremos como el mas conveniente para nuestro caso las piedras ó muelas horizontales, y tomaremos como datos en esta cuestion, aunque solo aproximados, el diámetro de las muelas $d = 1^m,4$;
el número de revoluciones por minuto para el mejor efecto 88. La cantidad de trabajo que debe llegar á cada piedra para que en las condiciones anteriores pueda moler un hectólitro de grano

ó sean $75,^{k^s}$ es unos 628.000^{km}.

Habrá pues, que emplear cuatro piedras; y haciendo que llegue á cada una la cantidad de trabajo anterior en cada hora, se producirá en dicho tiempo el efecto pedido que es moler 300 K.s de grano.

La eleccion del receptor estará determinada por la altura de la caida del agua, y otras consideraciones de que nos ocuparemos al tratar del estudio de los receptores hidráulicos: admitiremos por ahora, que el mas conveniente en este caso es una rueda de las llamadas de cajones y tomaremos análogamente que para el operador, como datos: el diámetro de la rueda $D = 4.^m$ y, el número de revoluciones por minuto, mas conveniente al efecto útil ocho; en cuyas circunstancias, conforme al segundo cuadro citado, la relacion del trabajo utilizado en esta rueda al trabajo motor, puede admitirse que es

$$\frac{T_u}{T_m} = 0,70$$

(b) Con estos datos, nos hallamos en el caso de proceder á la solucion del problema, que siempre se compondrá de dos partes: 1.ª la solucion geométrica: 2.ª, la solucion mecánica.

En la primera solo se trata de elegir entre las piezas comunicadoras del movimiento que llenan las condiciones generales que se han recomendado en los números 34 y 35 (y de que nos ocuparemos

tambien mas adelante), las que puedan poner en relacion la velocidad del receptor con la del operador, con la mayor sencillez posible.

Aquí desde luego se comprende que bastará emplear ruedas de engranage, y como, por su medio, se trasmiten las velocidades angulares de unos ejes á otros en razon inversa de los radios de las ruedas, como veremos en las otras seccion, se infiere que las ruedas que partan del lado del receptor, han de tener diámetros mayores que las que son conducidas por ellas.

Con arreglo á estas bases puede formarse un primer croquis como el de la fig.ª 30, que represente la disposicion general de las piezas de la máquina. Haciendo la rueda hidráulica Y ocho revoluciones por minuto, se ha colocado en su arbol una rueda cónica de engranage M cuyo rádio sea doble del rádio de la rueda N que dirige; y así se habrá cambiado el movimiento del primer arbol horizontal, en el de un segundo arbol vertical, que hará diez y seis revoluciones por minuto. Si en este mismo arbol OT se coloca una rueda dentada AA cuyo rádio sea 5,5 veces mayor que el radio de los piñones B, con quienes engrana, los árboles en que van montados os los piñones, harán 88 revoluciones por minuto: por consiguiente, podrá colocarse sobre ellos el operador, que ha de ser una rueda horizontal

animada de esta misma velocidad, y ocupará la posicion de las muelas K. Como son cuatro las que hay que emplear, se repartirán simétricamente al rededor de la rueda A A. De este modo se tendrá una idea de la disposicion general de la máquina y de las magnitudes relativas de sus piezas. Las magnitudes absolutas se deducirán, tanto por el espacio que deben ocupar los operadores, y el receptor, como por las condiciones de resistencia á los esfuerzos que deben sufrir cada una de las piezas, los cuales se calcularán primero aproximadamente, descomponiendo la fuerza que obra en el operador (que es fácil conocer como veremos pronto), y prescindiendo de todas las resistencias pasivas, ó bien apreciándo estas por valores medios por comparacion con casos análogos. Así se completará la solucion geométrica del problema, que pone en relacion las velocidades de las dos piezas extremas de la máquina, y se pasará á la solucion mecánica, aunque, como se ha visto, no se desatiende tampoco esta última al ocuparse de la primera.

(c) El problema se reduce, ya á determinar la cantidad de trabajo que debe desarrollar el motor para que llegue al operador el suficiente para moler cuatro hectólitros de grano, ó sea un hectólitro por cada muela. Como esto exige (a) para cada una un trabajo de 628.000 ^{Km}

por hora, ó sean 10.467.^{Km} por 1', y es conocida tambien la velocidad en su circunferencia por la ecuacion

$$v = \pi d \times 88 = 3{,}141 \times 1{,}^m5 \times 88 = 415^m$$

se deducirá el esfuerzo tangencial F que debe obrar sobre cada muela por la ecuacion

$$F = \frac{10.467}{415} = 25^K \text{ próximamente.}$$

Conocido F se irán calculando los esfuerzos tangenciales á cada una de las ruedas anteriores, estableciendo diferentes ecuaciones de equilibrio al rededor de los ejes de rotacion en esta forma:

Sean R el radio de la rueda M,
r el radio de la rueda N,
R' y r' los de las ruedas AA y BB
ρ el radio de los gorrones del eje en L y L'

F' el esfuerzo tangencial que hay que aplicar al piñon para vencer F, mas los rozamientos que se desarrollan en los apoyos del árbol, rozamientos que se calcularán por los métodos que se exponen en la 3.ª seccion y que por ahora supondremos representados por (f). Se tendrá para determinar F' la ecuacion

$$F'r' = F \times \frac{d}{2} + (f)\rho$$

Analogamente se podrá deducir F'' ó esfuerzo que hay que aplicar tangencialmente á la rueda N para vencer la resistencia F' que obra tangencialmente á la rueda AA, mas los rozamientos en los apoyos del arbol OT, y en los dientes de

los engranages de dicha rueda y el piñon B. Se tendrá así una ecuacion de la forma

$$F''r = F'R + (f')P'$$

Conocido F'' se determinará el esfuerzo F''' que debe aplicarse tangencialmente á la rueda hidráulica para vencer la resistencia F'' que se ejerce tangencialmente á la rueda M, mas los rozamientos que se desarrollan en los apoyos E del arbol horizontal, y en los dientes de los engranages M y N; se tendrá pues

$$F''' \times \frac{1}{2} D = F''R + (f'')P''$$

Conocido F''' se multiplicará por la velocidad de su punto de aplicacion, que designándola por v' será en un minuto

$$v' = \pi D \times 8 = 3,1415 \times 4^{m} \times 8 = 100,^{m}5\,,$$

y el producto $F'''v' = 100,5\, F'''^{\,Km}$ será el trabajo útil por minuto que debe trasmitir el motor á la rueda hidráulica para mover cada muela, y por consiguiente:

$$T_u = 4\, F'''v' \quad \text{para las cuatro muelas:}$$

pero segun la relacion anterior $\frac{T_u}{T_m} = 0,7$, se deducirá que el trabajo motor deberá ser en 1'

$$T_m = 1,43\, T_u$$

ó en un segundo $T_m = \frac{1,43 T_u}{60}$

Como este trabajo le ha de suministrar el peso del agua que cae de una altura conocida H determinaremos este peso P por la ecuacion

$$PH = \frac{1,43 T_u}{60}$$

que dá $P = \frac{1,43 T_u}{60 H}$: y por último el volumen V de agua por 1", que se ha de hacer llegar á la rueda será, en metros cúbicos,

$$V = \frac{P}{1000} = \frac{1,43 T_u}{6000 H}$$

en la que se pondrá por T_u el valor deducido anteriormente.

Solo quedará que asegurar la permanencia de accion del motor y de la resistencia por medio de aparatos reguladores: para el primero se emplean ordinariamente las compuertas que permiten variar la cantidad de agua que pasa á la rueda: y en cuanto á la resistencia, se regulariza por medio de mecanismos que hacen llegar ó suministran á la accion de las muelas, una cantidad constante de grano. De este modo la máquina subsistirá en las condiciones de movimiento que suponen los cálculos anteriores con la suficiente exactitud, á que en la práctica puede aspirarse en esta clase de cuestiones.

Este cálculo es inútil cuando la maquina está construida.

45. Se vé por esta discusion, que cuando está dada la cantidad de trabajo que hay que aplicar al útil, se puede determinar la fuerza absoluta que conviene al motor, y arreglarla convenientemente; pero esta investigacion no es útil mas que para el proyec-

to mismo del establecimiento de la máquina, porque si está yá construida y se trata únicamente de hacerla marchar, se puede, por un tanteo fácil, arreglar su trabajo y su velocidad, haciendo variar la resistencia útil ó la intensidad de la fuerza motriz, por los medios indicados.

Por otra parte, si se diese al contrario, la cantidad de trabajo absoluta que puede suministrar el motor en la unidad de tiempo, se procederia análogamente para determinar sucesivamente, la cantidad de materia que debe y puede confeccionar el útil.

La solucion que precede es la suficiente para la práctica

46. La solucion del problema del establecimiento de las máquinas, que acabamos de exponer ligeramente, no es, segun hemos visto, mas que aproximada; pero seria imposible por cualquier otro camino, atendiendo la multitud de indeterminadas de que depende; y es suficientemente exacta para la práctica, en la que no se pretende nunca llegar al rigor matemático, y en que se mira como un grado de perfeccion tan precioso como raro el aproximarse al resultado mas ventajoso aun cuando no sea mas que en $\frac{1}{5}$ ó $\frac{1}{4}$. Desgraciadamente sucede con bastante frecuencia que la ignorancia de los constructores de máquinas, sino les separa entera-

mente del objeto que se proponen. Se alejan sin embargo, de tal modo, de él, que el efecto útil que obtienen no es $\frac{1}{5}$ ni aun muchas veces $\frac{1}{10}$ del que se hubiera podido esperar de una disposicion mejor.

Por lo demas, si insistimos sobre este punto no es mas que para hacer palpable la dificultad y la inutilidad por ahora de una solucion rigorosa del problema de las máquinas; es para evitar á los discípulos la idea de tentativas que no tendrian muchas veces éxito alguno, y para hacerles conocer, por otra parte, el mérito real de los conocimientos basados sobre datos ciertos de la mecánica y de la experiencia; es en fin, para ponerlos en estado de conocer de antemano la naturaleza de los recursos que pueden esperarse de cada una de ellas en los diferentes casos.

Objeto y ventajas reales de las máquinas.

47 Se vé, tambien por todo lo que hemos dicho hasta ahora de las máquinas, que no puede tratarse de hacerlas producir los efectos maravillosos que se prometen á veces artistas poco instruidos en las leyes de la mecánica, y dominados por su imaginacion. Sometidas como lo están, segun su constitucion precisa, á una multitud de resistencias pasivas, no pueden transmitir el trabajo que se les confia sino con cierta pérdida, que llega hasta tal punto, que se consideran como excelentes, bajo este punto de vis-

ta, las que dan un efecto útil que sea 0,50 ó 0,60 de la cantidad de accion absoluta desarrollada por el motor. Existen, efectivamente, segun hemos indicado ya anteriormente, un gran número de máquinas que, gracias á la multitud ridícula y á la falsa combinacion de sus ruedas, aprovechan apenas $\frac{1}{10}$ ó $\frac{1}{20}$ de esta cantidad de accion.

La ventaja delas máquinas consiste esencialmente en la propiedad, mucho mas preciosa aun, que la de multiplicar simplemente la potencia del motor, de modificar esta potencia, segun las diferentes necesidades de las artes y segun leyes tales que la hagan aplicable á una especie de trabajo, á que no podria serlo en su primitivo estado. Asi es como con su auxilio, se ha llegado á reemplazar la destreza é inteligencia del hombre, por la fuerza puramente física de los animales y demás agentes naturales; que, costando mucho menos, produce la unidad de trabajo á un precio mucho mas arreglado. Muchas veces, el uso de las máquinas y de los útiles, suministra productos mas bellos y mas perfectos porque son mas precisos en su forma, y mas regulares. Con su auxilio, se llega á conseguir que los motores comuniquen á los cuerpos velocidades mayores que las que ellos poséen, ó que las que pueden adquirir por sí mismos; y que eleven cargas, cuyos pesos esceden al esfuerzo absoluto de que son capaces; circunstancias que provienen simplemente

de que la masa de los cuerpos, en el primer caso, y su velocidad en el segundo, son muy pequeñas, de suerte que las fuerzas vivas ó las cantidades de trabajo correspondientes, tienen en sí mismas valores bastante pequeños y que estan en relacion con las cantidades de trabajo desarrolladas por los motores. En fin, el empleo de una máquina puede tambien servir algunas veces para aumentar el efecto útil de que seria capaz el motor si obrase inmediatamente sobre la resistencia, lo cual no contraria absolutamente en nada lo que se acaba de decir, atendiendo á que el aumento de efecto resulta únicamente entonces del empleo mas ventajoso de la fuerza absoluta del motor.

Tales son, pues, los servicios reales que pueden hacer las máquinas á la sociedad y á las artes en general, pero para llegar á este resultado tan importante, es indispensable resolver segun hemos visto anteriormente, una multitud de cuestiones, aun bajo el punto de vista puramente mecánico, relativas unas al trabajo de los motores, otras á la manera de obrar los útiles y los diversos operadores, y otras, en fin, á la evaluacion de las resistencias pasivas que necesariamente acompañan á las piezas destinadas á trasmitir la accion y el movimiento.

Las primeras y últimas formarán principalmente el objeto de esta parte del curso.

El estudio de los operadores tiene que limitarse á los que forman parte de las máquinas que tienen mas aplicacion en las obras públicas, y en los talleres de construccion.

Fin de la primera seccion.

CURSO DE MECANICA

aplicada á las máquinas

Segunda seccion.

De los principales medios de regularizar la accion de las fuerzas sobre las máquinas, y de asegurar la uniformidad del movimiento.

Objeto particular de esta seccion.

Hemos indicado ya en la seccion anterior (31 a 41 y 44) las causas que hacen irregular el movimiento de las máquinas, y los principales medios que se pueden emplear para corregir lo mejor posible su influencia. Nó se trata ya de insistir sobre estas generalidades, sino de presentar algunos ejemplos particulares, algunas aplicaciones que se reproducen frecuentemente en el establecimiento de las máquinas. Trataremos aqui sucintamente de los moderadores, de los reguladores, de las manivelas simples ó múltiples, de los volantes y de los engranages.

De los moderadores

Objeto especial de los moderadores.

1 Su objeto especial es oponerse á toda aceleracion

de velocidad, que pudiera ser perjudicial al efecto de la máquina, y aun á veces peligrosa: los frenos en general, que se usan para comprimir las ruedas en movimiento y aumentar mas ó menos el rozamiento: los para-caidas y los volantes de aletas, que ocasionan, chocando con el aire, una resistencia que crece rápidamente con la velocidad de eje, pertenecen especialmente á la clase de moderadores. Como absorven una gran porcion del trabajo motor, no se deben usar sino cuando es imposible regularizar la accion motriz, ó la de la resistencia util, lo que se reduce casi exclusivamente al caso en que la máquina contiene pesos, cuya accion no puede ponerse en equilibrio constantemente por las resistencias inherentes á la máquina: los frenos sirven tambien siempre que es indispensable debilitar bruscamente la fuerza viva que poseen las piezas de una máquina, y sucede muchas veces que los volantes de aletas tienen únicamente por objeto, el obtener un movimiento rigorosamente uniforme. En fin, las válvulas de seguridad, que sirven para dar salida al agua de las prensas hidráulicas, al vapor de las calderas, cuando la tension llega á cierto límite; los vertederos ú orificios que sirven para vaciar los depósitos de agua demasiado llenos que alimentan las máquinas hidraulicas &, deben tambien referirse á la clase de los moderadores.

Frenos empleados en los carruajes.

2. Cuando en las bajadas de las cuestas se calzan las ruedas de un carruaje por medio de la cadena ó dela galga se cambia el rozamiento de rodadura de estas ruedas, en otro de resbalamiento que es mucho mas enérgico; semejante disposicion es un verdadero freno, pero atendiendo á que el aumento de intensidad del rozamiento es aqui únicamente relativo al peso de la carga colocada sobre el carruage, no se le puede hacer variar segun varíe la inclinacion de la pendiente de los caminos: he aqui por qué Mr. Molar, antiguo director del Conservatorio de artes y oficios, ha hecho un gran servicio á los conductores de carruages, sustituyendo á las cadenas y á las planchas, un freno que consiste en una traviesa horizontal, armada en sus dos extremidades de dos placas de hierro que abrazan una porcion de las llantas de las ruedas traseras del carruage, contra las que se les obliga á apoyarse con mas ó menos fuerza, por medio de una rosca de presion, movida por medio de un manubrio. Resulta, además, de esta disposicion, la ventaja de que no hay necesidad de detener los carruages para echar la plancha, como se hacia antiguamente; pero como exige que el conductor baje á cada paso, los empresarios de diligencias han imaginado últimamente, manejar el freno desde lo alto del pescante por me-

dió de un mecanismo de palancas muy conocido que es el indicado en la fig.ª 1.ª

Una disposicion análoga usan los conductores de wagones sobre los caminos de hierro para oponerse al aceleramiento del movimiento en las bajadas que exceden $\frac{1}{100}$ á $\frac{1}{150}$ de pendiente.

La figura 2 representa uno de los mecanismos mas ordinarios, que se reduce á un doble freno manejado simultáneamente por una varilla A.B á la que se comunica un movimiento longitudinal, desde el carruage, por medio de un sistema de palancas.

Frenos empleados en los molinos de viento

3. Disposiciones análogas se usan tambien en la mayor parte de los molinos de viento: se envuelve el contorno esterior de una gran rueda de madera, montada sobre el arbol inclinado del volante con una faja de madera de olmo, próximamente de 0,m07 de espesor, y cuya flexibilidad se aumenta por medio de trazos de sierra practicados hácia su parte interior: esta faja está sostenida por una de sus estremidades en un punto fijo A (fig. 3) y por la otra B está unida al movimiento de una palanca, que sirve para tirarla con una fuerza suficiente para dar lugar, á lo largo de la rueda, á un rozamiento capaz de moderar arbitrariamente el movimiento de la máquina, aun durante los

mayores vientos: el uso de las fajas flexibles es aquí ventajoso como lo veremos en la 3.ª seccion, para hacer crecer mas rápidamente el rozamiento que la tension que se ejerce en uno de sus extremos.

Se observará, por otra parte, que esta disposicion se emplea aquí principalmente para suspender totalmente el movimiento de la máquina y dejar al conductor la posibilidad de recoger las alas del molino, proporcionando así la extension de su superficie á la accion que es necesario trasmitir á la resistencia. Sirviéndose del freno para moderar constantemente el movimiento durante los grandes vientos, se fatigaria demasiado la máquina; se correria el peligro de que se prendiese fuego la faja que roza, y seria necesario tener sumo cuidado y una vigilancia contínua en la maniobra del freno. El empleado en las gruas es una lámina de palastro dispuesta segun representa la fig.ª 4.

Como el objeto de los frenos es absorver un excedente del trabajo motor, conviene aplicarlos á ruedas de gran rádio, ó dotadas de gran velocidad, á fin de que por medio de una pequeña presion, ó de un rozamiento bastante débil, sean susceptibles de grande efecto.

De los volantes de aletas

Nociones preliminares

4. Los volantes de aletas, tales como los de los tor-

nos de hilar, y de los relojes, se componen de un arbol giratorio, en el que se fijan unos brazos terminados por placas metálicas muy delgadas, cuyo plano es ordinariamente perpendicular á la direccion del movimiento, pero que algunas veces tiene tambien una inclinacion mayor ó menor respecto del eje, á fin de disminuir convenientemente la intensidad de la resistencia del medio. El movimiento del arbol del volante está unido al de la máquina, por medio de ruedas ó de una rosca sin fin, que acelera mucho su velocidad (fig.ª 5.). La ventaja de esta disposicion es la de reducir el sistema á que se aplica, á un límite de velocidad que no puede esceder, y que es sensiblemente uniforme al cabo de un pequeño número de revoluciones.

La teoria del volante de aletas considerado mecánicamente, no ofrece, por sí misma, ninguna dificultad; pero debemos aprovechar la ocasion que se presenta para dar un ejemplo del modo con que el movimiento llega á la uniformidad en las máquinas, mas ó menos rápidamente (30), tanto mas, cuanto que el volante de aletas se emplea muchas veces en las esperiencias como medio de procurarse un movimiento constante que sirva para medir la intensidad ó la ley de la velocidad de ciertos cuerpos.

Ecuacion del movimiento teniendo en cuenta la resistencia del aire, la del rozamiento &.

5. Elegiremos mas particularmente por ejemplo, la disposicion (fig. 6) que ha servido á Bordá para medir la resistencia que opone el aire al movimiento de los cuerpos animados de diferentes velocidades: P es el peso motor suspendido al extremo inferior de un cordon vertical a b arrollado á un tambor horizontal que está montado sobre el arbol c del volante que lleva las alas planas ed, e'd' de formas cualesquiera; pero simétricamente colocadas en un plano que pasa por el eje c. Atendiendo á que los brazos cd, cd' estan adelgazados en sentido del movimiento y que la velocidad del tambor, del cordon y del peso P, son muy pequeñas respecto á la de las alas, despreciaremos, como suele hacerse ordinariamente, la resistencia que experimentan de parte del aire; pero tendremos en cuenta la variacion de longitud de las partes arrolladas ó desarrolladas del cordon, así como su inercia, que puede ejercer alguna influencia en las grandes maquinas.

Esto supuesto, llamando

π la densidad ó el peso de la unidad del volumen del medio

A la superficie reunida de las aletas supuestas perpendiculares á la direccion del movimiento.

R la distancia de su centro al eje.

r la de un punto cualquiera al mismo eje;
R' el rádio del tambor medido en el medio del cordon;
ρ el rádio de los muñones del arbol;
w la velocidad angular de este último;
L la longitud total de las partes arrolladas y desarrolladas del cordon;
l la de esta última parte;
δ el peso de la unidad de longitud de este cordon;
P el contrapeso medido en Kilógramos;
p el peso de las demás partes del sistema comprendido el del cordon.
$g = 9.^{m}8088$ la velocidad que mide la gravedad y
dm el elemento de masa situado á la distancia r del eje;

La velocidad del centro de las aletas será wR, la del peso P y la del cordon wR'; en fin, la de un punto cualquiera situado á una distancia r del eje wr; la aceleracion de la velocidad angular w en el elemento dt del tiempo, siendo $\frac{dw}{dt}$, $dm\, r \frac{dw}{dt}$ será la resistencia ocasionada por la inercia de la molécula cualquiera dm á esta aceleracion; y $r^2 dm \frac{dw}{dt}$ el momento de esta resistencia respecto al eje; y en fin, $\frac{dw}{dt} \int r^2 dm$, la suma de los momentos semejantes para todas las partes materiales que forman cuerpo con el arbol. En cuanto á los momentos relativos á la inercia del peso P y del cordon, serán evidentemente para el 1.º $\frac{P}{g} R'^2 \frac{dw}{dt}$ y para el 2.º $\frac{\delta L}{g} R'^2 \frac{dw}{dt}$

En fin, la accion de las aletas contra el medio ambiente y del rozamiento sobre los muñones que sostienen el arbol del tambor, dan lugar á resistencias fáciles de valuar, segun el resultado de las esperiencias conocidas: bastará decir aquí que la 1.ª de estas resistencias debe medirse por el producto $\frac{\gamma\pi A w^2 R^2}{2g}$ en que el coeficiente numerico γ tiene por valor 1,45, término medio, para las velocidades comprendidas desde las menores hasta 50^m próximamente por segundo; y que la 2.ª es una cierta fraccion f de la suma de las presiones sostenidas por los muñones del árbol, suma evidentemente igual á

$$P+p-\frac{P+\delta l}{g}R'\frac{dw}{dt}$$ atendiendo á que

$\frac{P+\delta l}{g}R'\frac{dw}{dt}$ es la medida de la inercia del peso P y de la parte vertical l del cordon. Se tendrá, pues,

$$(P+\delta l)R'=\left(\int r^2dm+\frac{P+\delta l}{g}R'^2\right)\frac{dw}{dt}+\frac{\gamma\pi A w^2 R^3}{2g}+f\left(P+p-\frac{P+\delta l}{g}R'\frac{dw}{dt}\right)\rho$$

observando que el rozamiento de que se trata tiene por brazo de palanca el radio ρ de los muñones del arbol.

O haciendo para abreviar

$$\frac{P+\delta l}{g}R'^2+\int r^2dm-f\frac{P+\delta l}{g}R'\rho=m^2;\ \frac{\gamma\pi A R^3}{2g}=n^2;\ (P+\delta l)R'-f(P+p)\rho=q^2,$$

$$m^2\frac{dw}{dt}+n^2w^2-q^2=0$$

No hemos tenido en cuenta en esta ecuacion la resistencia que presenta el cordon al desarrollarse en b, porque es ordinariamente despreciable, pero si el peso P subiese y se arrollase el cordon, ofreceria una resistencia muy comparable en ciertos casos á la que ocasiona el rozamiento de los muñones; llamando entonces t la tension que sufre el cordon en b, tension evidentemente igual á $P-\frac{P+\delta l}{g}R'\frac{dw}{dt}$, la resistencia debida á esta rigidez re-

vida el brazo de palanca R', estaria medida por la espresion

$$a+bt=a+b\left(P-\frac{P+\delta l}{g}R'\frac{dw}{dt}\right)$$

en que a y b son constantes y funciones del diámetro del cordon, del de el tambor y del grado de uso ó flexibilidad de ese cordon; de suerte que se tendria que añadir el término

$$aR'+b\left(P-\frac{P+\delta l}{g}R'\frac{dw}{dt}\right)R'$$

al que contiene el rozamiento, lo que no cambiaria en nada la forma de la ecuacion anterior

$$m^2\frac{dw}{dt}+n^2w^2-q^2=0$$

en donde bastaria simplemente atribuir otros valores á las constantes m^2, n^2 y q^2 que permanecerian siempre realmente positivas á causa de la pequeñez de ρ y f, a y b.

Integracion de la ecuacion del movimiento y consecuencias.

6. De aquí se sacará

$$t=m^2\int_0^w\frac{dw}{q^2-n^2w^2}=\frac{m^2}{2qn}\log\left(\frac{q+nw}{q-nw}\right)\ (a)$$

porque se supone w nulo en el origen del movimiento. Por consiguiente se tendrá para calcular la velocidad angular w adquirida por el sistema al cabo del tiempo cualquiera t

$$w=\frac{q\left(e^{\frac{2qnt}{m^2}}-1\right)}{n\left(e^{\frac{2qnt}{m^2}}+1\right)}$$

(a) Para deducir esta integral se ha supuesto que m^2 y q^2 son constantes, pero como sus valores dependen de δl, esta integral no es completamente exacta: pero es bastante aproximada, porque el peso del cordon desarrollado, de que se prescinde es siempre pequeño respecto de los demás.

siendo $e = 2,7828$ ... y el logaritmo anterior neperiano; de manera que si se toma su valor en las tablas ordinarias, habrá que multiplicarlo por el número 2,302585.

Se vé que este valor converge muy rapidamente hácia su límite $\frac{a}{n}$ al que no llega rigorosamente sino al cabo de un tiempo infinito. Como este límite corresponde además al instante en que se hace uniforme el movimiento, se llegaría á él directamente, estableciendo en la ecuacion del núm.º 5 que espresa las condiciones del equilibrio del sistema, que dw es igual á cero.

El valor de que se trata demuestra tambien que la velocidad angular crecerá tanto mas rápidamente á partir de los primeros instantes, cuanto mayor sea la relacion

$$\frac{2qn}{m^2} = \frac{\sqrt{2g((P+\delta L)R' - f(P+p)\rho)\,\gamma\pi AR^3}}{(P+\delta L)R'^2 + g\int r^2 dm - f(P+\delta L)R'\rho}$$

es decir, cuanto mas considerable sea el coeficiente $\gamma\pi AR^3$ del término de la resistencia y menor la suma $\frac{P+\delta L}{g}R'^2 + \int r^2 dm$ de los momentos de inercia.

La espresion de estos últimos se hallará en cada caso, por medio de las reglas y fórmulas de la mecánica segun la forma de cada parte que hay que considerar, y su posicion respecto del eje.

En fin, la espresion

$$\frac{a}{n} = \frac{\sqrt{2g\{(P+\delta L)R' - f(P+p)\rho\}}}{\gamma\pi AR^3}$$

que dá el valor límite de la velocidad, prueba que este valor crece lentamente con el momento PR' del

contrapeso, y disminuye, al contrario, muy rápidamente á medida que aumenta el radio medio R del volante; no ejerciendo la inercia su influencia sino en la duracion del tiempo necesario para que el sistema adquiera la velocidad uniforme.

De los reguladores y moderadores

Objeto especial de los reguladores.

7. Los frenos y volantes de aletas que acaban de ocuparnos, podrian evidentemente servir de reguladores á las máquinas, si no tuvieran el inconveniente de consumir inútilmente una gran porcion del trabajo motor, á causa de que su accion regulatriz depende esencialmente de la intervencion de las resistencias pasivas estrañas al sistema. Los medios mas convenientes de llenar aquel objeto consisten en las disposiciones que permiten variar, segun sea necesario, la cantidad de materia, la resistencia que forma el objeto del trabajo util, ó la intensidad de las fuerzas motrices y de inercia. Hemos citado algunos ejemplos en los números 35, 43 y 44, y nos seria facil estender su nomenclatura.

Asi, por ejemplo, los depósitos de aire de presion constante de las bombas y de las máquinas soplantes; los grandes depósitos de agua ó estanques que acompañan siempre á las máquinas hidráulicas; las tolbas y parrillas giratorias de los horni-

llos de las máquinas de vapor, que sirven para distribuir regular y uniformemente el combustible debajo de la caldera; el espacio vacío que se deja encima del agua en esta caldera para que sirva de depósito al vapor: los escéntricos y otras disposiciones que sirven para arreglar la distribucion de este vapor, encima y debajo de los émbolos; los mecanismos particulares que sirven para recojer mas ó menos la tela que recubre las alas de los molinos de viento segun la velocidad del movimiento; los husillos y tambores en espiral que tienen por objeto regularizar la accion del motor ó de la resistencia útil en muchas máquinas, principalmente en los reloges y en los bocartes que se emplean en las minas &, son otros tantos aparatos reguladores de la especie que nos ocupa; mientras que las válvulas de seguridad que sirven para dejar escapar el vapor de las calderas cuando la tension llega á cierto límite, los vertederos ú orificios que sirven para vaciar los depósitos de agua que alimentan las máquinas hidráulicas, cuando estan demasiado llenos &, pertenecen mas bien á la clase de simples moderadores á que se refieren los frenos y volantes de aletas.

Reguladores espontáneos ó universales de las máquinas

8. Por lo demas, se deben distinguir entre todos estos medios, los que son independientes de los agen-

tes encargados de dirigir el trabajo de la máquina, dispensándoles así de una vigilancia continua y costosa siendo la esencia de las buenas máquinas, el gobernarse por sí mismas en cuanto sea posible y sin auxilio de la inteligencia humana.

Las máquinas de vapor en su estado actual de perfeccion, ofrecen un modelo, por decirlo así, perfecto, y al que se debe procurar aproximarse en cuanto sea posible en las demas máquinas. Pero no podriamos pasar revista á estos diversos medios cuya descripcion y teoria pertenecen en su mayor parte á la descripcion y á la teoria misma de las máquinas en que se emplean; y solo pueden exceptuarse á causa de la universalidad de su aplicacion, el regulador de bomba y el péndulo cónico, ó regulador de fuerza centrífuga, que los ingleses llaman simplemente gobernador, á los que agregaremos el regulador de resorte ó de efecto instantáneo de que trataremos mas adelante y cuya adopcion hemos propuesto desde el año 1829. (*)

En efecto, los husillos en espiral y los tambores cónicos que parecen ofrecer grandes aplicaciones, no pueden ser útiles sino en las máquinas en que, ya la accion del motor, ya la de la resistencia es variable segun una ley exactamente conocida, lo que no tiene lugar sino en algunos casos particulares.

Su teoria, que es puramente geométrica, no

(*) Curso de mecánica industrial para los obreros, de Metz; 3.ª parte litografiada, n.º 67, pag. 67.

ofrece, por otra parte, ninguna dificultad: sabido es que están destinados á recibir las arrolladuras, las espiras de una cuerda ó cadena en la que obra una fuerza variable; y toda la cuestion consiste en aumentar ó disminuir el brazo de palanca de esta fuerza, respecto al eje del tambor, de manera, que su momento permanezca constante para las diversas posiciones del sistema.

Este medio no es ventajoso sino cuando la fuerza conserva valores constantemente crecientes ó decrecientes en una série de revoluciones de la máquina.

(a) Esto tiene lugar en la resistencia que se desarrolla al elevar el agua ó un mineral, del fondo de un pozo profundo, por medio de un torno; porque el peso del cubo se agrega al de la cuerda desarrollada, cuya influencia puede ser notable. La cuestion se reduce á dar al árbol del torno una forma cónica (figª 12) para que en todas las posiciones sea constante el esfuerzo del motor aplicado á la manivela que ha de vencer la resistencia variable suspendida á la cuerda.

Llamando P el esfuerzo del motor,

R el radio de la manivela,

Q el peso elevado,

p el peso de la unidad de longitud de la cuerda;

la ecuacion de equilibrio para una posicion cualquiera en que la parte desarrollada sea l y el rádio del tambor r, será

$$(Q+pl)\,r = PR$$

que dará $r = \frac{PR}{Q+pl}$

cuyo valor nos indica, que el radio será tanto menor cuanto mayor sea l, ó cuanto mas bajo se halle el peso Q. Será facil, segun esto, deducir los diferentes valores de r que correspondan á las posiciones siguientes:

para la posicion mas elevada de Q... $r_0 = \frac{PR}{Q}$

para la 2.ª circunferencia en que se arrolla la cuerda............ $r_1 = \frac{PR}{Q+2\pi r_0 p}$

para la 3.ª id. id. id............ $r_2 = \frac{PR}{Q+2\pi(r_0+r_1)p}$

para la 4.ª id. id. id............ $r_3 = \frac{PR}{Q+2\pi(r_0+r_1+r_2)p}$

&c.

Para la última que corresponde á la posicion mas baja de Q medida por H,

$$r_n = \frac{PR}{Q+2\pi Hp}$$

Cuando se empleen dos cubos, con el objeto de evitar pérdidas de tiempo, el medio mas sencillo de regularizar el trabajo de la resistencia sobre el torno, es hacer uso de una cuerda sin fin, arrollada várias veces al rededor de un arbol cilíndrico; porque entonces las dos porciones de cuerda ascendente y descendente, son iguales y se equilibran en todas las posiciones, así como el peso propio de los cubos, quedando que vencer solo la resistencia útil que es constante é igual al peso de la materia elevada. Este sistema, tiene sin embargo, el inconveniente de exigir cuerdas demasiado largas

especialmente cuando se aplica á pozos de minas muy profundos.

Del regulador de bomba y flotador

Descripcion del mecanismo y de su juego.

9. A es un cuerpo de bomba que toma el agua en un depósito inferior ó pozo C; la barilla de su émbolo EF se mueve en virtud de la accion de la máquina, cuyo movimiento se trata de regularizar; esta bomba se emplea en elevar el agua que aspira, al depósito superior B que tiene en D un orificio cuya abertura está arreglada por medio de una pequeña compuerta interior, ó de una llave exterior. G es un flotador suspendido al extremo de una palanca KL destinada á dar movimiento á las compuertas, válvulas, &ª que dejan facil acceso al fluido motor sobre el receptor de la máquina.

Supongamos que se cierra primeramente el orificio en D, y se deja llenar de agua el depósito B hasta que su nivel superior IH obligue al flotador á tomar una posicion media fija de antemano y que corresponda al caso en que el balancin KL es horizontal; si se abre despues el orificio en D de manera que produzca en un tiempo dado un gasto exactamente igual al volumen de líquido que llega de las bombas, para la velocidad media ó de régimen que se desee dar á la máquina,

y que se puede verificar por medio de una esperiencia directa, resultará que mientras sea regular el movimiento de esta máquina ó del émbolo dirigido por ella, el nivel I H permanecerá constante; y el flotador G inmovil; pero en el momento en que su velocidad difiera de la que se ha adoptado como regimen bien sea por esceso ó por defecto; el nivel I H y el flotador, se elevarán ó descenderán cantidades correspondientes, y harán mover á la palanca K L y su sistema, con una energia relativa al aumento ó disminucion que ha sufrido el volumen de la parte sumergida, ó del liquido que desaloja.

(a) Omitimos establecer la teoria de este regulador que deduce M. Poncelet fundandola en las condiciones del equilibrio del flotador, porque su uso está poco generalizado en las máquinas, á causa de los inconvenientes que presenta y que pueden resumirse en los siguientes: 1.º introducir en la máquina una pieza de movimiento alternativo, y una resistencia variable, inherentes al juego de la bomba, y por lo tanto, una nueva causa de variacion en el movimiento de la máquina que es precisamente el que se trata de regularizar: 2.º dar lugar á una pérdida de trabajo motor que consiste en la que se emplea en elevar continuamente una cantidad de agua al depósito superior; y estar además espuesto á dejar de funcionar por el menor desarreglo en alguna de

las paredes de la bomba: 3.°, por último, que el efecto de este aparato como regulador, es muy lento, porque desde que ocurre el cambio de velocidad en la máquina, hasta que llega á introducirse en el depósito la cantidad de agua necesaria para que el nivel varie suficientemente de posicion y obre el flotador sobre las palancas y válvulas motrices, trascurre un tiempo relativamente grande, y este inconveniente no puede evitarse mientras se emplee la bomba, porque introduciendo esta un volúmen variable de agua en cada instante, se halla el nivel sujeto á continuas oscilaciones, aun para la velocidad de régimen; por lo que, las trasmisiones de movimiento á las válvulas, se disponen de modo que estas últimas no participen de dichas oscilaciones pequeñas del flotador, y solo se muevan cuando este sufre cambios notables de posicion provenientes de los cambios de velocidad, y esto exige que el nivel varie tambien mucho de posicion, y de aquí la necesidad de que trascurra un tiempo notable, durante el cual la bomba esté funcionando bajo una velocidad distinta de la de régimen.

Del regulador de fuerza centrífuga

Descripcion del aparato y datos para su establecimiento.

16 Este regulador se compone ordinariamente de un rombo articulado ABCD (fig 8) montado sobre un eje vertical AH, puesto en comunicacion de movimiento con una pieza de rotacion de la máquina: el rombo está fijo á este eje, por uno de sus ángulos A, y recibe de él el movimiento angular; las barillas superiores AB, AD, llevan sobre sus prolongaciones, bolas de metal P; al angulo en C está unido un manguito de garganta G que abraza al eje AH y puede resbalar con un débil rozamiento á lo largo de este eje. El efecto de la fuerza centrífuga sobre las bolas es el de elevar mas ó menos el manguito G que por una comunicacion de movimiento, fácil de imaginar, sirve para arreglar el empleo de la fuerza motriz (44) variando convenientemente la abertura de una válvula, de una llave, &. cuando la velocidad de la máquina cambia por la accion de una causa cualquiera. Llamando P y M el peso de la masa de cada bola

$g = 9,^{m}8088$, $\pi = 3,14159$

w la velocidad angular del eje AH del péndulo;

α el angulo correspondiente de las barillas AB y

AD con este eje,

a el lado AB del rombo,

b la distancia de A al centro de gravedad de las bolas P,

h en fin, la longitud AC de la diagonal vertical del rombo, que fija la posicion de manguito G.

Se podrá considerar este rombo, como sometido á las fuerzas siguientes que se hacen equilibrio.

1.º la fuerza centrífuga de las dos bolas reunidas medida por $2\,M w^2 IP = 2\,M w^2 b \operatorname{sen} \alpha$, en donde $AI = b \cos\alpha$ es el brazo de palanca respecto al centro A; 2.º el peso $2P = 2\,Mg$ de estas mismas bolas, que tiene por brazo de palanca la distancia $PI = b \operatorname{sen}\alpha$; 3.º, en fin, el peso y la fuerza centrífuga de las barillas que se acostumbra despreciar, asi como el rozamiento de las articulaciones y el esfuerzo necesario en C para vencer la resistencia que se opone al movimiento de las válvulas reguladoras &.

Condiciones para el equilibrio y regla práctica inglesa.

17. Despreciando, pues, la consideracion de estas últimas fuerzas y observando que el equilibrio debe establecerse entre las otras dos al rededor del punto A, se tendrá

$$2\,M w^2 b \operatorname{sen}\alpha . b \cos\alpha = 2\,P b \operatorname{sen}\alpha$$ de donde

á causa de $h = 2a \cos\alpha$ y $P = Mg$, $b \cos\alpha = AI = \frac{g}{w^2}$; $h = \frac{2ag}{bw^2}$

asi se tendrá la altura h á que se mantiene el manguito G debajo del vértice A, cuando se conocen

la velocidad w á la unidad de distancia del eje AH, y recíprocamente. Sea t la duracion en segundos de una revolucion de este eje, se tendrá $tw=2\pi$; sustituyendo este valor w en la relacion anterior se deducirá

$$t=2\pi\sqrt{\frac{b}{2a}\cdot\frac{h}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{AI}{g}}$$

que es, como se vé, el doble de la duracion de las oscilaciones de un péndulo que tuviese por longitud la altura $AI=\frac{b}{2a}h$ de las bolas debajo del vértice fijo A del rombo. Suponiendo, por ejemplo, que el regulador verifica una revolucion en 2" ó haga 30 revoluciones en un minuto, se tendrá $t=2$ y AI será la longitud $0^m,994$ del péndulo que oscila segundos en nuestros paises.

Insuficiencia de esta regla

18. Tal es la regla muy sencilla que indican ordinariamente los autores para determinar la posicion de las bolas, relativa á una velocidad media ó de régimen, de una máquina, cuando se dá esta velocidad de antemano; pero estas reglas no son satisfactorias, porque son independientes del peso de las bolas, y no tienen en cuenta la energia que debe poseer su fuerza centrífuga, para vencer las resistencias pasivas inherentes al movimiento del sistema, que sirve para hacer cerrar ó abrir las válvulas ó llaves del flúido motor; así no debe estrañarse que á causa de esta vaguedad en su teo-

ria haya hecho el regulador de que se trata, muy pocos servicios, y que se le haya abandonado en la mayor parte de las aplicaciones á las máquinas.

Tredgold, ingeniero ingles, que ha escrito un tratado sobre las máquinas de vapor parece que ha conocido la insuficiencia de la regla establecida; propone fijar la mayor amplitud del movimiento vertical de las bolas, de modo que cuando la velocidad de la máquina escede á $\frac{1}{20}$ de su valor medio, las válvulas esten enteramente cerradas, y que esten completamente abiertas, por el contrario, cuando la máquina tenga su velocidad media de régimen; á fin, dice, de evitar para esta última velocidad, los estrechamientos de los conductos que dan paso al vapor debajo de los émbolos de la máquina, y la perdida de trabajo motor que es su consecuencia; pero es evidente que semejante disposicion tendria el inconveniente de producir disminucion de fuerza motriz, precisamente en el instante en que sobrevendria un decremento de velocidad, lo que es absurdo y demuestra que, sin tener en cuenta el inconveniente de los estrechamientos, se debe dar forzosamente á las válvulas para el caso de una velocidad media, una posicion intermedia entre la que deja llegar por completo el fluido motor, y la que lo intercepta del todo.

Condiciones verdaderas del establecimiento del aparato.

19. Llamando h' la altura del manguito que corresponde á la velocidad angular $w'=(1+n)w$, h'' la que corresponde á la $w''=(1-n)w$, siendo siempre w la velocidad media de régimen; y h la altura correspondiente, se tendrá

$$h'=\frac{2ga}{(1+n)^2w^2b}=\frac{h}{(1+n)^2}\,,\quad h''=\frac{2ga}{(1-n)^2w^2b}=\frac{h}{(1-n)^2}$$

y por consiguiente para la amplitud del movimiento de elevacion del manguito que debe arreglar el de las valvulas de admision,

$$h''-h'=h\,\frac{4n}{(1-n^2)^2}=4nh$$

próximamente, si se desprecia n^2 respecto de la unidad.

Suponiendo con Tredgold, $n=\frac{1}{20}$, se tendrá $h''-h'=\frac{1}{5}h$ próximamente; lo que demuestra que, para un cambio de velocidad bastante pequeño, los espacios descritos por el manguito y el sistema que le pone en relacion con las valvulas, podrán ser muy apreciables; de manera, que se puede decir con este ingeniero, que si el regulador de fuerza centrifuga, es defectuoso, no es por falta de sensibilidad, como lo han dicho algunos autores que le han sustituido con detrimento de la accion motriz, el juego de un regulador de bomba de la especie del que nos ha ocupado anteriormente.

Influencia del peso de las bolas y del ángulo de las varillas.

20. En cuanto á la influencia del peso de las bolas

sobre la accion reguladora, Tredgold se contenta con observar (Pag. 445 nº 553 de la obra citada) que en las máquinas de vapor, varia este peso desde 12 á 36 Kilogˢ, y que su efecto depende en gran parte de los ángulos formados por las varillas.

(a) Por esta razon se emplean varias disposiciones de este regulador, representadas en las figuras 8, 9 y 10. La figª 8 ya hemos dicho que afecta la figura de un rombo, y por esta razon la longitud AP de las varillas no puede esceder mucho á la parte AB porque seria facil que en la posicion mas baja de las bolas llegasen á tocar la palanca GL. En la figª 9 se dá mayor longitud á las varillas inferiores del cuadrilatero que á las superiores y así se puede aumentar mas la relacion de las distancias AP respecto de AB sin el inconveniente indicado antes, aunque tambien lo es el dar demasiada longitud á dichas varillas inferiores. En la disposicion de la figura 10, se conserva la forma de rombo al cuadrilatero articulado, pero por la parte superior del eje, lo cual permite tambien aumentar la relacion de AP á AB en limites aun mas estensos. Ahora bien, como la energia de un peso P para vencer la resistencia que oponga el manguito G depende de la intensidad de P trasladado á B cuyo valor será $P' = P\frac{AP}{AB}$ resultará que en la disposicion de la figura 8 en que la relacion de la distancia AP á la AB no puede aumentarse mucho, se necesitará un peso en las bolas pa

ra vencer una resistencia dada p en el manguito superior al que seria necesario si se emplease la disposicion de la fig.ª 9, y con mayor razon, superior al necesario en la fig.ª 10 para vencer la misma resistencia. Por eso se debe preferir una ú otra de estas dos últimas figuras cuando haya que vencer grandes resistencias en el manguito sin que el peso de las bolas esceda de los límites ordinarios.

Pero si comparamos las tres disposiciones del regulador respecto á los espacios que en cada una tiende á recorrer el manguito, sucede todo lo contrario; pues en la figura 8, y en general siempre que la articulacion B esté próxima á P el espacio recorrido por B será grande y tambien el del manguito G; al paso que en las figuras 9 y 10 que están dispuestas para alejar los puntos B de las bolas y aproximarlos al eje A, los arcos descritos por las bolas ocasionarán otros muy pequeños en los puntos B y D, y los espacios recorridos por el manguito, serán tambien muy pequeños. Esto es lo que debe suceder, en efecto, pues si antes hemos hecho ver que un mismo peso P de las bolas produce esfuerzos mayores en las figuras 9 y 10 para mover el manguito, que en la figura 8 claro es que los caminos que tiendan á hacer recorrer á la resistencia ó á este manguito serán menores en dichas figuras que en la 8, pues siempre habrá de verificarse que si P está equilibrado con p (resistencia en el

manguito); cualquiera que sea la máquina, P multiplicado por su camino, será igual á p multiplicado por el suyo: lo cual es la aplicacion del principio de las velocidades virtuales.

Ecuacion de equilibrio del regulador en el caso de un incremento de velocidad, teniendo en cuenta la resistencia que hay que vencer — 1.ª disposicion fig.ª 8.ª

21. Para demostrar como se deriva de esta condicion la verdadera teoria del regulador de fuerza centrífuga, supondremos segun los autores ingleses, que se haya establecido el aparato de manera que cuando la máquina llegue á la velocidad de régimen, medida por ω, el manguito C y el sistema de la palanca y de la valvula que arrastra, no ejerzan ninguna accion, uno sobre otro; lo que exige que este sistema se halle, para la posicion del manguito correspondiente á la relacion $h = \frac{2ag}{b\omega^2}$ (8), en un estado de equilibrio estricto, prescindiendo del rozamiento. Esto supuesto, se observará que la velocidad angular del regulador podrá aumentar en cierta fraccion dada de su valor primitivo, antes que el esfuerzo que se ejerce sobre el manguito, sea capaz de hacer mover la valvula reguladora, es decir, de vencer las resistencias inherentes á este movimiento: será preciso, en efecto, que la intensidad de la fuerza centrífuga de las bolas aumente de manera que puedan hacer equilibrio á la vez á la accion del pe-

so y de las resistencias de que se trata; lo que dá una nueva ecuacion de condicion á que debe satisfacer el regulador, y que se obtendrá facilmente por medio de la simple descomposicion de fuerzas; pero que para mayor generalidad la hallaremos por el principio de las velocidades virtuales.

Consideremos desde luego el caso de la figura 8, y conservando las denominaciones admitidas, (16) llamemos además p la resistencia que tiene que vencer el manguito; y $w' = (1+n')w$ la nueva velocidad angular que debe adquirir el regulador para vencer esta resistencia; haciendo por un instante abstraccion del movimiento angular de que se trata, se supondrá que se eleva el vértice C una cantidad infinitamente pequeña dh que podrá tomarse para la velocidad virtual de p; el centro de gravedad de las bolas describirá el arco elemental $PS = b d\alpha$, la velocidad virtual de la fuerza centrifuga estimada segun su direccion, será $PS \cos\alpha = b d\alpha \cos\alpha$, la del peso de las bolas será $b d\alpha \operatorname{sen}\alpha$; en fin, puesto que $h = 2a\cos\alpha$, $dh = -2a \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha$ será la velocidad virtual de C ó de P.

Segun esto, el principio de las velocidades virtuales dará para la ecuacion de equilibrio de las fuerzas, observando que las acciones de $2P$ y de p son contrarias á la de la fuerza centrifuga

$$2 M w'^2 IP = 2 M w'^2 b \operatorname{sen}\alpha$$

$$2 M w'^2 b^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, d\alpha - 2 P b \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha - 2 a p \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha = 0$$

ó dividiendo por 2 senα dα y observando que

$$M=\frac{P}{g} \text{ y } h=2a\cos\alpha$$

$$Pw'^2b^2h-2ag(Pb+pa)=0$$

pero se tiene por hipótesis (8) $h=\frac{2ag}{bw^2}$; luego esta última ecuacion se convierte en

$$Pw'^2b-bPw^2-apw^2=0$$

lo que dá para la relacion que hay que establecer entre el peso P de las bolas y la resistencia p

$$\frac{P}{p}=\frac{a}{b}\,\frac{w^2}{w'^2-w^2}=\frac{a}{b(2n'+n'^2)}=\frac{a}{2n'b}$$

proximamente, atendiendo á que n' se supone muy pequeña.

Así existe una relacion necesaria entre la de que se trata y las cantidades a, b y n', que fijan las dimensiones del regulador y la magnitud de la separacion de la velocidad angular respecto de la velocidad de régimen. Si se quiere, por ejemplo, que esta separacion no pueda esceder á $\frac{1}{50}=0{,}02$ de w, se tendrá $P=25\frac{a}{b}p$; y como en la disposicion que representa la fig.ª 8 no puede b esceder sensiblemente, vez y media á a, sin peligro de que las bolas encuentren á la palanca GI, en la posicion mas baja del sistema, se deberá dar á P un valor al menos $\frac{2}{3}\,25=16{,}67$ veces p para producir el efecto deseado.

Caso en que el movimiento se retarda: relacion entre los incrementos y decrementos de velocidad que miden la sensibilidad del regulador.

24. Cuando la velocidad de la máquina en lugar de aumentar, como acabamos de suponer, disminuye, de manera que resulte $(1-n'')w = w''$, por ejemplo, el peso de las bolas debe hacer equilibrio á la accion de la fuerza centrífuga y de la resistencia p, lo que establece en cada caso la relacion necesaria

$$\frac{w^2}{w'^2-w^2}=\frac{w^2}{w^2-w''^2} \quad ó \quad w'^2+w''^2=2w^2$$

de donde se saca reemplazando w' por $(1+n')w$, y w'' por $(1-n'')w$

$$n''=1-\sqrt{1-n'(2+n')}=n'(1+\tfrac{1}{2}n')+\tfrac{1}{2}n'^2(1+\tfrac{1}{2}n')^2+\tfrac{1}{2}n'^3(1+\tfrac{1}{2}n')^3 \text{ \&}$$

ó tomando solo el primer término de esta série á causa de su mucha convergencia;

$$n''=n'+\tfrac{1}{2}n'^2 \;,\; n''-n'=\tfrac{1}{2}n'^2,$$

resultado que demuestra que el manguito y la válvula regulatriz, empezarán á moverse cuando las separaciones de velocidad de una y otra parte de la media ó de régimen w, sean sensiblemente iguales, siempre que la magnitud de estas separaciones, que mide aquí el grado de sensibilidad ó la energía regulatriz del aparato, sea suficientemente pequeña

Este aparato debe satisfacer además á otras condiciones que unidas á las anteriores, sirven para determinar, en cada caso, el valor que se debe

adoptar para a y b; debe, en efecto, ser capaz de hacer cerrar ó abrir completamente la válvula motriz por medio de un nuevo aumento ó disminucion de velocidad en la máquina; porque el manguito no se moverá mientras que esta velocidad no exceda w'; ó no sea menor que w''.

Del sistema de embrague adoptado para suplir la fuerza del regulador por la de la máquina.

28. Cuando los valores de p y de h''-h' sean tan grandes que resulte imposible el mover la válvula directamente por el manguito del regulador, se sabe que los constructores acostumbran sacar, del mismo movimiento de la máquina, la fuerza necesaria para verificar esta maniobra cuya disposicion está representada en la fig.ª 11.

El regulador se emplea únicamente entonces para hacer mover el manguito de embrague L por medio de la palanca GL; OK es un arbol que toma directamente su movimiento de la máquina, y á cuyo alrededor pueden girar con libertad sin resbalar longitudinalmente, las ruedas de ángulo N, M, es decir que son locas sobre este arbol y engranan con la rueda Q, que sirve para trasmitir en un sentido ó en otro el movimiento del arbol OK á la válvula desde el manguito dentado L que tiene, al contrario, la facultad de resbalar sobre este arbol girando con él, llega á embragar una

ú otra de las ruedas M ó N, de modo que la obligue á girar con este arbol.

Resulta de esta disposicion que el esfuerzo p se reemplaza únicamente por el que se necesita para hacer resbalar primeramente y embragar despues, el manguito L con una ú otra de las ruedas N y M de que se trata. Pero como á partir del instante en que los dientes del manguito L estan en contacto con una de las ruedas, debe aumentarse el esfuerzo p para vencer las resistencias inherentes al engrane, pasará cierto tiempo antes que la máquina haya adquirido el nuevo aumento ó disminucion de velocidad que necesita este aumento de resistencia.

Conclusion y observaciones generales relativas al establecimiento de los reguladores de fuerza centrífuga.

36. Terminaremos lo expuesto acerca del regulador de fuerza centrífuga con algunas observaciones importantes que deben tenerse presentes al tratar de su establecimiento.

Es claro desde luego que de cualquier modo que se haya arreglado primitivamente, sus efectos no podran menos de ser muy inciertos y muy irregulares, si la resistencia de las válvulas ó del sistema que las une al manguito no es constante, ó si es susceptible de crecer mas allá de los límites que se se le han asignado como su-

cede en muchos casos.

Ademas, si la máquina esta animada de un movimiento oscilatorio ó periódicamente variable como sucede á las que tienen balancines, bielas y manivelas, el regulador no hará mas que oscilar en cada revolucion á uno y otro lado de la posicion media, comunicando á la valvula motriz, movimientos contrarios, mas perjudiciales que útiles, pues que no pueden impedir de ningun modo las oscilaciones periódicas de la velocidad de la máquina.

El volante, cuya teoria estudiaremos despues, es el único medio capaz de disminuir la amplitud de estas variaciones de velocidad, por decirlo así, momentáneas; y el efecto del regulador debe limitarse á que el movimiento no se acelere ó se retarde demasiado en una sucesion de periodos de la máquina.

En fin, cuando se ha recurrido simultáneamente al empleo del volante y del regulador, conviene no dar á este último una sensibilidad tal que pueda esperimentar oscilaciones aun mientras dura el movimiento regular ó de régimen de la máquina; lo que exige que se tome para $n'w$ ó $n''w$ precisamente la mayor de las separaciones que recibe la velocidad durante este movimiento y á pesar de la presencia del volante. Se puede tambien, sin disminuir esta sensibilidad,

dar á la garganta del manguito que maneja las valvulas, una longitud tal que, mediante un huelgo conveniente; estas últimas no se muevan sino á partir de la posicion del regulador que correspon de á la mayor separacion de que se trata.

Esta disposicion es sobre todo necesaria en el caso en que hay precision de emplear, para manobrar las válvulas, el embrague de que se ha hablado en el número 28, pero entonces, en lugar de establecer el juego sobre uno ú otro de los manguitos debe estarlo en el arbol mismo que lleva el embrague, de modo que el manguito de este arbol tenga que recorrer cierto espacio antes de tocar con una ú otra de las ruedas. Además, como aquí la válvula es susceptible de elevarse ó de bajar en una cantidad muy grande, antes de que la inercia de las masas de la máquina haya permitido aproximar sensiblemente la velocidad actual á la de régimen se vé que esta disposicion podrá en ciertos casos presentar inconvenientes muy graves y tendrá siempre el de producir en la válvula un estado oscilatorio de una duracion mayor ó menor, que proviene de que las amplitudes de su movimiento no tienen sino una dependencia muy indirecta con la causa que hace variar la velocidad de la máquina, y que consiste evidentemente en la variacion misma de las resistencias que le estan aplicadas.

Esta última consideracion nos conduce á

una solucion del problema, que nos parece mas directa y mas sencilla, además de presentar otras ventajas muy esenciales que tendremos cuidado de dar á conocer en el artículo siguiente.

Nuevo regulador de resorte ó instantáneo.

Descripcion del aparato.

37. A y A' son dos porciones independientes de un mismo árbol motor interrumpido hácia el punto medio del intérvalo comprendido entre los cojinetes hg y h'g' (fig 13) que sostienen las estremidades próximas. El arbol A arrastra en su movimiento el tambor de hierro fundido C C que lleva en su contorno espigas salientes a b; el arbol A' forma cuerpo con el cubo a'a' que lleva láminas de acero rectas y flexibles a a' dirigidas segun los rádios y cuyos estremos mas distantes están comprimidos por las espigas b del tambor C; de este modo el movimiento de rotacion del arbol A se transmite al arbol A' por intermedio de los resortes a a', y recíprocamente.

B, B' son dos ruedas iguales que tienen el mismo número de dientes y reciben el movimiento de los dos arboles respectivos A y A'; estas ruedas engranan en los piñones F y F' montados sobre el arbol D.D' paralelo al A A'; pero mientras que la rueda F' forma cuerpo con su arbol, la rueda F que lleva un manguito de garganta G, y cuya alma está labrada

su tuerca puede caminar á lo largo de este árbol que está labrado como un tornillo. Ahora bien, es claro que si las porciones de arbol A, A' forman un cuerpo, describiendo las ruedas B, B' los mismos angulos, la tuerca seguiria el movimiento de la rosca, sin caminar longitudinalmente; pero como estos árboles recorren, por el contrario, angulos diferentes á causa de la flexion de los resortes que ligan sus movimientos, sucederá que la rueda F' se moverá á lo largo de su arbol una cantidad exactamente proporcional al ángulo de torsion de los árboles A y A' y que dará la exacta medida de este ángulo. Además, si el esfuerzo de reaccion de estos mismos árboles es constante, lo que supone el movimiento uniforme, la rueda F girará, sin caminar, en el sitio determinado por el ángulo de flexion de los resortes relativo á este esfuerzo. Suponiendo pues, que el manguito G se emplea en hacer mover la válvula que sirve para ar reglar el volumen del fluido motor admitido sobre la máquina, de manera que esta válvula se abra cuando la flexion de los resortes aumenta por haber aumentado las resistencias en el arbol A', y se cierre cuando disminuya dicha flexion, se vé que la nueva disposicion llenará tanto mejor las funciones de regulador, cuanto que aquí las distancias á que suba ó baje la válvula, es decir, las cantidades en que se ha aumentado ó disminuido el orificio, estarán exactamente en relacion con las

variaciones correspondientes de la flexion de los resortes que, no llegando al límite en que se altera su elasticidad, son, como sabemos, proporcionales exactamente á las variaciones del esfuerzo que solicita á estos resortes en sus extremos.

Observaciones particulares sobre esta disposicion.

38. En lugar de las ruedas dentadas B y B', se pueden emplear simplemente poleas que se comuniquen el movimiento por cuerdas sin fin, siempre que estas cuerdas esten convenientemente tensas y que el arbol D, D' esté bastante separado del A, A' para que la polea F que tendrá entonces muy poca altura no se presente demasiado oblicua respecto de la cuerda que la une á la polea B.

Del mismo modo, en lugar de dejar al piñon F la libertad de moverse en sentido del eje D D', lo que obliga á darle, ó á la rueda mayor altura, se podria mantenerlo en el mismo sitio por medio de espaldones laterales fijos; pero el eje D D' llevaria entonces el manguito y tendria la facultad de resbalar longitudinalmente en sus dos cojinetes y en el ojo de la rueda F, que estaria respaldada lateralmente y montada en el arbol D D' por medio de lengüetas salientes que se introducirian en cajas practicadas longitudinalmente en el mismo arbol.

Puede ser tambien ventajoso en ciertos casos

reemplazar el tambor C por una rueda de engranage de la máquina que seria loca sobre el árbol A A', compuesto entonces de una sola pieza. La fuerza se aplicaria á esta rueda y no trasmitiria ya su accion á este último sino por medio de los resortes asi dispuestos como en el caso anterior. En esta disposicion se suprimiria la rueda B' y el tambor C llevaria dientes que engranasen con los del piñon F'.

En fin, indicaremos la disposicion muy sencilla de la fig.ª 14 en que la rueda F y el manguito G que conduce estan montados sobre el árbol mismo del tambor C movido por la rueda de engranage E: el ángulo relativo descrito por este tambor y por el árbol A A' en virtud de la flexion de los resortes hace mover el doble sector dentado B B' montado en un árbol particular D que forma sistema con el A A'. La fuerza aplicada á la rueda E que engrana con el tambor C ocasiona la flexion de las láminas, el movimiento del doble sector y, por consiguiente, el del manguito G; hasta que llegando al límite dicha flexion, ya no hay movimiento relativo del sector y gira todo el sistema al rededor del eje A A'. Siempre que cambie la resistencia aplicada á este árbol, se moverá el manguito y, por consiguiente, la válvula motriz.

Cálculo de las dimensiones que hay que dar á las láminas de este regulador.

39. Veamos ahora como se deberá proceder en el establecimiento del regulador que nos ocupa.

Suponiendo que son iguales las láminas de los resortes y que sean prismáticas, llamando P el esfuerzo total que les solicita en sus estremos por su contacto con las espigas del tambor C; n su número; a su longitud ó saliente sobre el arbol desde el punto de empotramiento, b su anchura ó dimension paralela al arbol; c su espesor y f su flecha comun; se tendrá segun las fórmulas conocidas sobre la resistencia de las varillas elásticas á la flexion (*)

$$f = \frac{4Pa^3}{nEbc^3}$$

en la cual, el coeficiente de elasticidad E debe tomarse segun las esperiencias de Mr. Morin (**) igual á 30.000.000.000. Kil. para el acero fundido llamado Huntzman tomando el metro y el Kilogᵒ. por unidad de medida. Suponiendo además que P′ y f′ representan el mayor esfuerzo y la mayor flecha que pueden soportar las láminas sin que su elasticidad se altere aun despues de un largo uso, esfuerzo que es próximamente $\frac{1}{6}$ del que corresponde á la ro-

---

(*) Navier, aplicacion á la máquina &ª 2ª edicion, nº 81.

(**) Nuevas esperiencias sobre el rozamiento, tomos 5 y 6 de los sabios extranjeros del instituto.

tura, se tendrá para arreglar las dimensiones de estas láminas

$$f' = \frac{4P'a^3}{nEbc^3}, \quad R = \frac{18P'a}{nbc^2} \quad ó \quad \frac{3P'}{n} = R\,\frac{bc^2}{6a}$$

en donde E tiene el mismo valor que anteriormente; y R, coeficiente de rotura debe tomarse, segun M. Morin, igual á 103.333.333 kil.s

De aquí se saca para calcular el espesor c y la anchura b cuando la longitud a y la flecha máxima se conocen.

$$c = \frac{4R}{18E} \cdot \frac{a^2}{f'} = 0{,}000765\,\frac{a^2}{f'}, \quad b = \frac{18P'}{Rnc^2}\,a = 0{,}29732\,\frac{f'^2P'}{na^3}$$

Tomando $f = 0{,}^m05$ solamente, $n = 32$, $P' = 2000$ kil.s y $a = 0{,}^m5$, se hallará $c = 0{,}^m0038$ y $b = 0{,}^m372$. Como esta última dimension no puede adoptarse para la anchura de una sola lámina, se reemplazará esta por 6 ó 7 pequeñas de $0{,}^m05$ á $0{,}^m06$ de anchura en sentido del eje de la rueda á no ser que se prefiera aumentar el número n ó la longitud a de modo que b se reduzca convenientemente; resultado á que se llegará siempre disminuyendo f, de la que depende esencialmente la sensibilidad del aparato.

Por otra parte, si se dá al perfil de las láminas la forma de la parábola de igual resistencia, conservándole siempre el espesor c cerca del alma del arbol, se aumentará la flexibilidad y los resultados serian mas ventajosos.

Observacion relativa á las máquinas poderosas y al caso en que hay choques.

40. Suponiendo que el aparato esté montado sobre un eje de gran velocidad, lo que parece conveniente, el valor de 2000^{k} atribuido á P' corresponderá evidentemente á una máquina muy poderosa, lo que basta para demostrar la posibilidad de aplicar esta especie de regulador á los diversos casos que pueden ocurrir. Este valor será siempre fácil de determinar aproximadamente por medio del cálculo ó de la esperiencia; sin embargo, haremos observar que si esta misma máquina estuviese sometida á choques ó cambios bruscos de velocidad, el esfuerzo de reaccion P podria adquirir momentáneamente valores muy grandes, y comprometer la solidez de los resortes. En este caso convendrá disponerlos de manera, que cuando el ángulo relativo ó de torsion del tambor C respecto del árbol que sostiene los resortes, esceda al límite que corresponde á la flecha f', la corona de este tambor venga á insistir sobre las partes salientes ó brazos que forman cuerpo con el árbol de que se trata, condicion muy fácil de satisfacer, poniendo en el intérvalo de las láminas, varillas rígidas y muy fuertes contra las que vengan á aplicarse las salientes practicadas sobre el contorno inferior del tambor C. Convendrá siempre hacer uso de esta precaucion en todos los casos posibles, aun cuando no sea sino

por evitar los grandes esfuerzos de torsion que tienen lugar, en general, cuando se pone la máquina en movimiento y el motor debe vencer las fuerzas de inercia del sistema ademas de las resistencias ordinarias.

Ley que liga el movimiento del manguito del aparato á los esfuerzos del arbol sobre que está montado.

11. Habiendo arreglado así las dimensiones de las láminas, y el límite de los esfuerzos que deben sufrir, ó de la flecha, que deben tomar, se hallará sin dificultad, la ley que liga en general estos esfuerzos á las escursiones correspondientes del manguito G.

Llamando, en efecto,

θ el ángulo relativo ó de torsion del tambor, correspondiente al esfuerzo P y á la flecha cualquiera f,

a+d la distancia del estremo de las laminas al eje AA'

R el radio de las ruedas B, B',

r el de los piñones F y F',

e el paso comun de los diferentes filetes de la rosca D, D';

h la longitud de la escursion del manguito recorrida, mientras se describe el angulo θ ó el arco f, suponiendo que esta flecha es sensiblemente igual al arco que describe el estremo de la lamina, se tendrá

$$\theta(a+d)=f,\ \ h=\frac{\theta R}{2\pi r}e=\frac{2Pa^3eR}{\pi r(a+d)nEbc^3}$$

para fijar las posiciones del manguito relativas á cada uno de los esfuerzos P ejercidos sobre los resortes.

Este aparato puede servir tambien como dinamómetro para medir el trabajo de las máquinas.

42. Las longitudes de la ascension h recorridas por el manguito son exactamente proporcionales á los esfuerzos; por consiguiente se ve que este aparato puede muy bien servir como medio dinamométrico para medir en cada instante la intensidad de estos esfuerzos; no se necesitará para esto mas que adaptar al manguito un índice y un limbo graduado, dispuestos próximamente como lo estan en el dinamómetro de resorte de M.r Regnier; añadiendo además á este mismo aparato, la disposicion de un platillo giratorio cuya velocidad estuviese en una relacion conocida con la del arbol, el índice anterior describiria sobre este platillo curvas dependientes de la combinacion del movimiento ascensional del manguito, y del movimiento de rotacion indicado: es decir, que sus áreas serian proporcionales á los esfuerzos, y á los caminos recorridos en cada instante por su punto de aplicacion situado á la distancia $a+d$ del eje $A\,A'$; por consiguiente serian proporcionales á las cantidades de accion producidas por estos esfuerzos variables y podrian medirse directamente.

Suponiendo el movimiento uniforme y la fuerza reemplazada por su valor medio, llamándole P, y m al número de revoluciones del eje $A\,A'$ por minuto, la cantidad de trabajo corres-

pondiente á cada revolucion de este eje estará medida por el producto

$2\pi(a+d)P$, y para cada segundo por $\frac{2m\pi}{60}P(a+d)$ espresiones en que se pondrá por P su valor en h deducido de la ecuacion anterior que dá

$$P = \frac{\pi r(a+d)nEbc^3h}{2a^3eR}$$, y por consiguiente

$$2\pi(a+d)P = \frac{n\pi^2(a+d)^2Ebc^3rh}{a^3eR};$$

$$\frac{2m\pi(a+d)P}{60} = \frac{mn\pi^2(a+d)^2Ebc^3rh}{60\,a^3eR}$$

Modo de graduar ó arreglar el instrumento despues de colocado en su lugar.

43 Pero en lugar de calcular directamente P y el trabajo por estas fórmulas, convendrá determinar esperimentalmente despues de haber colocado en su lugar el tambor de resorte y el manguito, la relacion que existe entre P y h, ó, lo que es lo mismo, la escala de graduacion de h, cuyas divisiones en partes iguales corresponderán siempre á valores iguales de P mientras estos valores no escedan el límite de los esfuerzos que pueden sufrir los resortes de una manera permanente sin perder su elasticidad, límite que hemos designado por P' y al cual corresponde una escursion h' del manguito, que estará dada aproximadamente por la fórmula

$$h = \frac{2P'a^3eR}{\pi r(a+d)nEbc^3}$$

ó mas exactamente por la escala de graduacion de que se acaba de hablar.

Por otra parte, la esperiencia por cuyo medio nos proponemos hallar, sin cálculo, la longitud de h que corresponde á cada uno de los esfuerzos P, consiste simplemente en arrollar al tambor C una cuerda flexible á la que se suspenderá verticalmente un peso igual á este esfuerzo; fijando de antemano el arbol A A' que lleva los resortes, de manera que no pueda girar de ningun modo; al paso que el tambor y el manguito tomarán la posicion de equilibrio que corresponde al peso de que se trata.

Ejecutadas estas operaciones antes de poner en su lugar el sistema de palancas ó de ruedas que sirven para transmitir el movimiento del manguito á la válvula motriz de la máquina, pondrán en estado de arreglar completamente el mecanismo de transmision de este movimiento, de modo que llene convenientemente y sin duda alguna el objeto propuesto.

Establecimiento del aparato y especialmente del sistema de palancas que dá movimiento á la paradera ó válvula motriz.

144. En efecto, señalada ya la velocidad media ó de régimen, que se quiera dejar tomar á la máquina, no se tratará mas que de hacerla trabajar bajo la mayor y la menor de las resistencias útiles que tendrá que vencer mientras funcione, levantando al efecto cada vez la válvula motriz de modo

que se llegue á establecer la velocidad de régimen de que se trata; observando en seguida las posiciones medias correspondientes de los manguitos ó los valores de h, se dispondrá el sistema de palancas de comunicacion entre esta válvula y este manguito de modo que tomen necesariamente las posiciones simultáneas que se han observado en las experiencias.

Si se quiere proceder de un modo enteramente rigoroso, se haria trabajar á la máquina con la velocidad de régimen bajo una série de resistencias útiles comprendidas entre la mayor y menor, y observando cada una de las posiciones correspondientes de la válvula y del manguito, se tendria que disponer el mecanismo que establece la union entre sus movimientos, de modo que llegasen simultáneamente á estas posiciones; lo que se conseguirá por el trazado conveniente de las piezas movidas por el manguito. Pero como segun la naturaleza misma de las máquinas, los esfuerzos P crecen y disminuyen con la resistencia util p segun una ley espresada sensiblemente por la formula

$$P = A + Bp ,$$

en la cual A y B son funciones de la velocidad y de la magnitud que fija la posicion de las diversas piezas en un instante dado, se ve que desde que la velocidad debe permanecer la misma en cada revolucion ó en cada vuelta de la máquina

á la misma posicion; los esfuerzos P correspondientes á esta posicion se compondrán de una cantidad constante A que espresa la resistencia cuando $p=0$, ó cuando la máquina marcha de vacío con la velocidad de régimen de que se trata, y de otra cantidad Bp exactamente proporcional á la resistencia útil p.

Ahora bien, esta condicion estará evidentemente satisfecha si el sistema de palancas que liga el movimiento de la válvula con el del manguito está establecido de modo que los espacios descritos permanezcan exactamente proporcionales, como se ha indicado en primer lugar, porque permaneciendo la velocidad constante por hipótesis, las cantidades de trabajo que se gastan en cada revolucion de la máquina ó que se trasmiten al receptor, crecen sensiblemente como el esfuerzo P y como la masa de flúido que sale por el orificio de la válvula motriz.

Causas de irregularidad que no pueden evitarse con este aparato.

45. Estas consideraciones suponen implícitamente que las causas que tienden á alterar el movimiento de la máquina provienen únicamente de la variacion de la resistencia; esto es efectivamente lo que tiene lugar en casi todos los casos en que sucede, como en los laminadores, las máquinas para hilar, las serrerías &. que el trabajo del operador ó de muchos operadores se suspende ó se modifica momentáneamente por una resisten-

cia que es, á veces grande, á veces demasiado pequeña. Ahora bien, si la intensidad de la accion transmitida por el fluido motor á la máquina pudiese variar por causas independientes de la velocidad que toma esta máquina y de la abertura que deja la válvula regulatriz, el aparato que nos ocupa no seria de ninguna utilidad, porque aun permaneciendo constante la resistencia P, el grado de flexion de los resortes y la posicion del manguito del regulador podrian permanecer tambien sensiblemente constantes para variaciones muy lentas del movimiento del receptor, ocasionadas por una variacion correspondiente de la accion del fluido motor y alterarse la velocidad de régimen de la máquina.

Observaremos, no obstante que las causas que tienden á hacer variar de una manera absoluta la intensidad de la accion motriz, son muy raras en las máquinas bien establecidas, y que el verdadero remedio consiste entonces en las válvulas de seguridad, en los orificios que sirven para dar salida al fluido excedente; y en los grandes depósitos reguladores de que hemos hablado en el num.º 7. En cuanto al caso en que esta misma accion experimentase forzosamente un cambio de estado duradero y sensible, será muy facil modificar, en su consecuencia, la abertura de la valvula motriz.

Pero nos seria imposible aquí entrar ahora

en estos detalles sin apartarnos mucho de los límites que nos hemos propuesto.

Modo de evitar las oscilaciones en las variaciones momentáneas de movimiento.

46. No terminaremos, sin embargo, este objeto, antes de haber dicho una palabra sobre el modo de disponer el regulador de resorte para evitar las oscilaciones periódicas que no dejaría de experimentar el sistema de la válvula y de las palancas en el caso en que la máquina no fuese susceptible naturalmente de un movimiento rigorosamente uniforme.

Es evidente que aquí, como en el caso del regulador de fuerza centrífuga, es absolutamente indispensable el establecimiento de un volante, para disminuir la amplitud de las variaciones momentáneas y colocar el tambor de los resortes C, sobre un árbol en que sean menos irregulares los esfuerzos de un mismo periodo, dejando además al sistema de palancas que trasmite el movimiento del manguito á la válvula, el huelgo necesario para que esta última no se mueva mas que cuando los esfuerzos de la máquina excedan del mayor ó el menor valor relativo á un mismo periodo de movimiento, se conseguirá esto experimentalmente observando las oscilaciones del manguito despues que se haya establecido el volante y cuando la máquina trabaje en las condiciones prescritas, con su carga media. Pero

en lugar de usar este medio, es preferible, sin duda alguna, dar al sistema de palancas de que se trata, una elasticidad y flexibilidad bastante grande para que pueda ceder á los aumentos ó disminuciones momentáneas del esfuerzo P sin que se comunique el movimiento á esta válvula ó compuerta que tiende á la vez á resistir en virtud de su inercia y de su rozamiento, á estas variaciones instantáneas; mientras que no puede dejar de moverse bajo la accion resultante de un cambio del esfuerzo P.

En caso en que se emplease un sistema de ruedas para trasmitir el movimiento del manguito á la válvula no habria mas que disponer una de estas ruedas próximamente como lo está el tambor C, es decir, de modo que no pueda arrastrar á su arbol sino por medio de un pequeño ángulo de torsion.

Disposicion que puede adoptarse cuando las compuertas presenten gran resistencia

47. No se debe tener cuidado por el mayor ó menor esfuerzo que es necesario para poner en movimiento las válvulas y su sistema de palancas, en atencion á que este esfuerzo estará siempre vencido por las ruedas B, B' á costa de la accion motriz de la máquina. Sin embargo, si este esfuerzo fuese muy considerable, como sucede en las máquinas movidas por ruedas hidráulicas, convendria, sacrificando un poco el efecto instantáneo de la accion de este regulador, verificar la

maniobra de la compuerta, no directamente por el manguito G, sino por medio de un sistema de embrague de la clase que hemos mencionado en el número 28, de manera que hiciese marchar lentamente á la compuerta, disminuyendo considerablemente el esfuerzo que exige esta maniobra de la máquina.

Combinacion del regulador de resortes con el volante de aletas para regularizar directamente el movimiento.

48. Se podria aun hacer uso de la disposicion que nos ocupa para modificar el movimiento atrayéndole hácia el estado de régimen uniforme haciendo que el regulador funcionase en virtud de los cambios de velocidad que ocurriesen. Bastaria para esto aplicar á un eje independiente ó separado de la máquina, pero al que pudiese transmitir un movimiento de rotacion como al regulador de fuerza centrífuga, un volante de aletas cuya resistencia, creciendo rápidamente con la velocidad, produciria la torsion del tambor C sobre este mismo arbol. Se concibe en efecto, que dispuestas las cosas de manera que para la velocidad de régimen tenga la válvula la posicion media que le conviene, no podrá sobrevenir ningun aumento de velocidad sin que haya una disminucion correspondiente en la abertura del orificio, y recíprocamente, porque el volante de aletas dará lugar á cambios en la resistencia y, por consiguien-

te en los resortes. Ahora bien, sucederá así, que las amplitudes de la escursion del manguito de una y otra parte de la posicion media, crecerán sensiblemente como las separaciones mismas de la velocidad respecto de la de régimen. Además las propiedades de este aparato serán análogas á las del regulador de fuerza centrífuga, y el problema de su establecimiento será muy facil teniendo presente todo lo que se ha dicho en los números 5 y siguientes.

De las manivelas y escéntricos solicitados por potencias constantes en direccion y en intensidad.

Nociones preliminares sobre las manivelas.

49. Las manivelas ofrecen, como hemos visto (24 1.ª seccion) el medio mas conveniente en general de transformar el movimiento alternativo en movimiento de rotacion contínuo, y recíprocamente: generalmente estan formadas de un codo AB (fig.ª 15) fijo perpendicularmente al estremo de un arbol ó eje giratorio AE y á cuyo estremo obra, por el intermedio de una pieza rectilínea BF llamada biela, una resistencia ó potencia F dotada de movimiento alternativo en una direccion cualquiera BF que supondremos primeramente constante, como sucede sensiblemente en las buenas máquinas en que se trata de evitar las descomposiciones de fuerza inútiles, pero que en realidad está sometida á ligeras desviaciones

periódicas dependientes del movimiento del extremo de la biela opuesto al boton B de la manibela, es decir, del camino que está sujeto á recorrer este extremo.

Admitiendo semejante hipótesis se simplifica mucho el estudio de las propiedades constitutivas de la manivela, y se puede facilmente apreciar la influencia que tiene en general sobre la variabilidad del movimiento y de la accion.

Disposiciones particulares de las manivelas y de los escéntricos.

50. Algunas veces las manivelas son reemplazadas por escéntricos circulares; esto sucede especialmente cuando el brazo A B (fig.ª 16) es muy corto respecto al rádio del boton B; cuando el rádio de este es superior al brazo de la manivela esta se convierte en un escéntrico C D, en el cual el boton está reemplazado por un disco circular con garganta, abrazado por un anillo fijo al extremo de la biela; la rotacion se verifica alrededor de un punto C que no es el centro del disco, y por consiguiente, la biela que está formada por un sistema de varillas ligado al anillo, participa de un movimiento alternativo cuya escursion está medida por el doble de la distancia C D que se llama escentricidad. En la fig.ª 16, este movimiento se transforma en otro circular alternativo impreso á una palanca A B articulada con la biela. Como el aumento del boton de la manivela per-

mite suprimir casi enteramente el juego entre el disco y el anillo y evitar las desigualdades que provienen del desgaste de las superficies que rozan, lleva consigo esta disposicion mucha continuidad y dulzura en el movimiento, que se obtienen, como veremos despues, á costa de la fuerza motriz porque el rozamiento obra con un brazo de palanca grande, lo que hace que no se empléen los escentricos sino en los mecanismos sometidos á débiles esfuerzos, tales, por ejemplo, como los que en las máquinas de vapor estan destinados á mover las llaves ó válvulas de admision y de distribucion de este vapor en el cilindro.

La fig.ª 17 manifiesta una disposicion de manivelas de fácil y sólida ejecucion: el boton B de la biela está fijo á un anillo de hierro fundido unido al brazo de otro anillo mayor que hace las veces de volante, lo que ofrece la ventaja de corregir la irregularidad de accion precisamente en donde es mayor.

Manivelas simples

Modo como varia la accion de las manivelas simples en la primera media vuelta

51. Admitamos que la direccion invariable BF (fig.ª 18) sea la de la vertical, y llamemos F la fuerza constante que se supone obra de arriba abajo como un

peso, b el brazo AB de la manivela; α el angulo variable EAB que forma, en un instante cualquiera, con la vertical AE; la energia de la potencia que tiende á hacer girar, tendrá por medida su momento vertical $Fb \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha$, que es tambien la cantidad de trabajo ó de accion instantánea; será por consiguiente proporcional al brazo de palanca $b \operatorname{sen}\alpha = AD = BD'$ de la potencia, es decir, nula para las posiciones AE, AG de la manivela, y la mayor posible para la posicion intermedia y horizontal AC; el valor medio X del brazo de palanca AD en la semivuelta ECG se obtendrá observando que la cantidad de trabajo $F \times EG = F \times 2b$ desarrollada en esta semivuelta por la potencia F sobre la manivela debe ser igual á la que desarrollaria esta potencia en igual intervalo suponiéndola aplicada tangencialmente al círculo de radio X; ahora, esta cantidad de accion es evidentemente $F\pi X$, siendo π la relacion de la circunferencia al diámetro; luego se tendrá para determinar X la ecuacion

$$2\,bF = F\pi X;\ \text{de donde } X = \frac{2b}{\pi} = 0,6366.b.$$

Así la longitud del brazo de palanca medio de una fuerza constante que obra en una direccion invariable sobre una manivela simple, es un poco menor que los $\frac{2}{3}$ del rádio de esta manivela; se separa, segun se ve, de los valores extremos 0, y b del brazo de palanca en las cantidades respectivas 0,6366 b, y 0,3674 b. Multiplicando estas can-

tidades por $Fd\alpha$ se tendrá la medida de las separaciones de los momentos virtuales, ó de las cantidades de trabajo instantáneas $Fb \operatorname{sen} \alpha d\alpha$ respecto de su valor medio $0,6366 . bFd\alpha$.

Modo con què varia la accion en la segunda media vuelta y segun los diversos casos.

52. No hemos considerado aun sino lo que sucede en una semivuelta de la manivela; veamos ahora lo que tiene lugar cuando se verifica la otra media vuelta EHG. Puede suceder una de estas tres cosas: ó cesa de obrar enteramente la potencia F, ú obra en la direccion contraria á la primitiva ó en fin, continúa obrando en la misma direccion.

En el primer caso las cantidades de trabajo instantaneas comunicadas por la potencia F en la segunda semivuelta permanecen constantemente nulas, y por consiguiente la que comunica en una vuelta entera es aun $2Fb$, mientras que el trabajo de la misma potencia aplicada al brazo de palanca medio X será $2\pi FX$; se tendrá, pues, $X = \frac{b}{\pi} = 0,3183.b$, cantidad que difiere de sus valores estremos 0 y b en $0,3183b$ y $0,6817b$ respectivamente.

En el segundo caso, continuando la potencia moviendo el árbol en el mismo sentido, desarrollará en la vuelta entera la cantidad de trabajo $4bF$; de suerte que se tendrá $4bF = 2\pi XF$ y $X = \frac{2b}{\pi} = 0,6366b$ como para la primera media vuelta: tomo el mayor

y menor valor del momento de F tiene siempre lugar en las posiciones horizontales y verticales de la manivela y permanecen los mismos, las separaciones de la accion instantánea respecto de la media estarán aun medidas por los números 0,6366 y 0,3674; de donde resulta que la mayor separacion será menor aquí que en el caso anterior.

En el tercero, la cantidad de trabajo que comunica la pôtencia durante una vuelta entera de la manivela, será nula, y sucederá lo mismo con el trabajo instáneo medio, por lo que las separaciones medidas entonces por 0 y b serán las mayores posibles.

La 1ª y 2.ª de estas hipótesis se refieren especialmente al caso de los émbolos de bombas, á los pedales, bastidores de sierras &. de simple ó de doble efecto; es decir, que obran simplemente bajando; ó subiendo y bajando á la vez.

En cuanto á la última, no puede ser relativa mas que á la accion de la gravedad que obra constantemente en el mismo sentido, y no produce sobre las piezas de movimiento alternativo ningun efecto útil (22, 1.ª seccion). Como esta accion se une siempre á la de otra fuerza de la naturaleza de las antêriores, conviene examinar su influencia sobre el movimiento.

Modo de arreglar el peso de las manivelas y de su armazon

53. Llamemos p este peso de las piezas de movimiento alternativo, compuesto de la porcion del peso de la biela BF y del resto del armazon que obra segun la direccion de F; se observará que la accion de p se añade á la fuerza F ó se resta alternativamente, y segun el sentido en que se ejerce; de suerte que la cantidad de accion desarrollada por esta última en una revolucion entera, no se habrá alterado de ningun modo, como tampoco el brazo de palanca medio ni la cantidad de trabajo media instantánea; y como el momento de la potencia continúa siendo nulo, para las posiciones verticales de la manivela, se ve que el efecto de p se reducirá simplemente á aumentar ó disminuir el límite superior bF de este momento segun el sentido de la potencia F.

Esto supuesto, es claro que las separaciones del momento total de las fuerzas F y p respecto del momento medio, serán en el caso en que obre F en las dos semivueltas, y en el que no obre sino en la primera de modo que se añadiese á p, más considerables que en los casos anteriores en que se suponia $p=0$. En estas circunstancias, pues, será esencial poner el armazon en equilibrio alrededor del eje de rotacion; pero podrá suceder todo lo contrario en el caso en que no obrando F sino en la primera

semivuelta; y de abajo, arriba estuviese disminuida de p. En efecto; como el mayor valor del momento tiene siempre lugar para la posicion horizontal de la manivela, será $b(F-p)$ para la primera semivuelta; y bp para la segunda, y se deberá tomar la primera ó la última de estas dos cantidades para el momento límite segun que se tenga $F-p >$ ó $< p$; es decir, $F >$ ó $< 2p$. El caso mas ventajoso se refiere evidentemente al valor de p que dá $b(F-p) = bp$; de donde $p = \frac{1}{2} F$; así el mayor momento será entonces $0{,}5 bF$. Siendo siempre el momento medio $0{,}3186 bF$ y el menor, cero, se vé que las variaciones de trabajo instantáneo serán menores que para los casos anteriores.

Manivelas múltiples

Objeto de estas manivelas. Disposicion mas ventajosa de las manivelas dobles.

54. A fin de disminuir la irregularidad de la accion que ejerce una potencia sola sobre la manivela, se divide algunas veces esta potencia en dos ó mas iguales entre sí aplicadas á otras tantas manivelas distintas, montadas sobre un mismo arbol y dispuestas de modo, que los mayores momentos de los esfuerzos ejercidos sobre este arbol por las unas, correspondan precisamente á los menores momentos de los esfuerzos ejercidos por las otras.

Tal es, por ejemplo, el caso de las manivelas dobles (fig.s 19 y 20) que bien estén dirigidas en un mismo

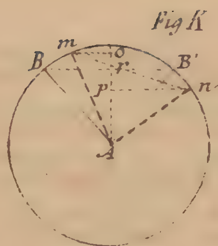
plano, pero en sentido contrario, ó bien en dos planos cualesquiera formando entre sí cierto ángulo; la primera de estas disposiciones presenta las mismas circunstancias que la manivela simple, y no puede servir para regularizar la accion de la potencia, supuesta siempre constante en magnitud y en direccion; la segunda, por el contrario, q.e se llama manivela acodada, puede muy bien emplearse para este objeto.

La discusion que le es relativa, enseña, en efecto, que cuando las potencias paralelas iguales y constantes, aplicadas á los dos brazos, obran en las dos medias vueltas en sentido del movimiento, la accion trasmitida es mucho mas regular que en las manivelas simples como vamos á manifestar.

Angulo correspondiente á la mínima irregularidad de de accion. Ley correspondiente á esta accion

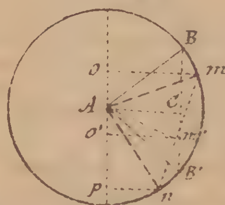
55. Sean AB, AB' (fig.a 21) los dos brazos de la manivela doble dispuesta de este modo; a el semi-ángulo BAI ó IAB' formado por estos brazos; es fácil asegurarse que el momento total de las potencias F llegará á su límite superior para las posiciones horizontal y vertical de BB', y á su límite inferior para las posiciones simétricas, en que uno de los brazos AB AB' se confunda con la vertical.

(a) En efecto, un valor máximo de la suma de los momentos, corresponderá á la posicion en que la cuerda BB' (fig. K) es horizontal porque en cual-

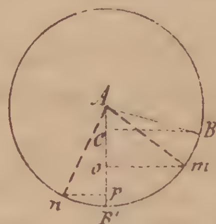


quiera otra inmediata á ella como mn, la suma de los brazos de palanca $mo + np$, será evidentemente menor que $mr + rn$, por consiguiente menor que mn ó que BB'.

Otro valor máximo de dichos momentos corresponde á la posicion en que la cuerda BB' es vertical; porque en cualquiera otra inmediata á ella como la mn (fig. K') la suma de los brazos de palanca $mo + np$ (que en el trapecio $mopn$ es igual á $2m'o'$) será menor que $2m'A$, ó menor que $2AC$ porque $m'A = AC$.



El valor mínimo de la suma de los indicados momentos corresponde á la posicion en que uno de los brazos como AB' (fig K") es vertical; porque en cualquiera otra inmediata á ella como la mAn la suma de los brazos de palanca $mo + np$ será mayor que BC: en efecto, si el angulo BAB' es $2a$; el $mAB' = a'$; y el $B'An = a''$ resultará



$2a = a' + a''$; $BC = \text{sen}\, 2a$; $mo = \text{sen}\, a'$; $np = \text{sen}\, a''$; por consiguiente $mo + np = \text{sen}\, a' + \text{sen}\, a''$; y
$BC = \text{sen}(a' + a'') = \text{sen}\, a' \cos a'' + \text{sen}\, a'' \cos a'$ cuyo valor es menor que $\text{sen}\, a' + \text{sen}\, a''$, ó que $mo + np$.

Estos valores estremos del momento total serán así respectivamente $2Fb\cos\alpha$, $2Fb\,\text{sen}\,\alpha$, $Fb\,\text{sen}\,2\alpha = 2Fb\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$.

Discutiendo estos valores se halla que sus diferencias son las mas pequeñas posible cuando $sen\alpha = cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ó que el angulo BAB' de las manivelas es recto (*). En esta hipótesis se obtiene para los valores límites anteriores de los momentos $2Fb\sqrt{\frac{1}{2}}$, $2Fb\sqrt{\frac{1}{2}}$, $2Fb.\frac{1}{2}$; de suerte que el momento medio se hallará comprendido entre

$$2Fb\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 2Fb \times 0,7071 \text{ y } 0,5 \times 2Fb.$$

Desarrollando en una vuelta entera las potencias F, la cantidad de trabajo $2F \times 4b$, desarrollarian en el mismo tiempo la cantidad de trabajo $2F \times 2\pi X$ si estuviesen aplicadas á la circunferencia cuyo rádio es X; así se tiene para determinar el brazo de palanca medio X en el caso actual $2b = \pi X$ de donde $X = \frac{2}{\pi} b = 0,6366 b$. El momento medio es pues igual á $0,6366 \times 2Fb$. y las diferencias con el mayor y menor momento que corresponden respectivamente á la posicion horizontal ó vertical de BB' y de los brazos AB, AB', son solamente $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{5}$ próximamente de su propio valor, lo que prueba que las manivelas acodadas en ángulo recto, son, efectivamente, muy ventajosas para regularizar la accion de las fuerzas.

Propiedades é inconvenientes de las manivelas triples ó cuádruples.

56. Para una manivela triple (fig.ª 22) cuyos brazos

(*) En efecto, siendo los dos 1.os de estos límites respecto de su valor absoluto, menores que el 3.º, es claro que habrá ventaja en aproximar lo mas que sea posible el mayor al menor, haciendo un máximo el menor de todos, que es lo que sucede aquí naturalmente cuando se toma $sen\alpha = cos\alpha$.

AB, AB', AB'' dividan en su proyeccion sobre un plano perpendicular al eje la circunferencia en tres partes iguales, y que esten solicitadas por tres fuerzas iguales F obrando solamente en la media vuelta EBG, se halla que el momento total tiene un valor máximo ó mínimo, cuando uno cualquiera de los brazos es horizontal ó vertical, de suerte que el momento medio está comprendido entre

$$Fb \text{ y } Fb \operatorname{sen} \tfrac{1}{6}\, 360^\circ = Fb \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866\, Fb.$$

siendo entonces el brazo de palanca medio

$$X = \frac{6Fb}{2\pi F} = \frac{3b}{\pi} = 0,955\, b$$

se ve que el momento medio 0,955 Fb no difiere mas que en $\frac{1}{12}$ del mayor y $\frac{1}{11}$ del menor. Estos resultados suponen, por otra parte, los armazones de las manivelas en equilibrio al rededor del eje A.

Seria facil probar que la manivela cuadruple ofrece menos irregularidad en su accion que la triple, pero tiene otros inconvenientes mucho mas graves para la práctica, que le son comunes con la manivela triple, y que bastarian por si solos para hacer renunciar á ellas.

El principal es la dificultad de ejecutarlas con la perfeccion y solidez suficientes. En efecto, siempre que un eje ó arbol giratorio está sostenido por mas de dos apoyos ó coginetes, es muy dificil, por no decir imposible, colocar sobre una misma recta los ejes de las partes cilíndricas que reciben estos coginetes, y entonces se concibe que el arbol ca-

borse entre sus apoyos y da lugar á esfuerzos violentos, que consumen una porcion considerable de la fuerza motriz y causa la rotura de las manivelas; el torno es el único medio que se puede emplear para poner así un arbol en línea recta; esto puede hacerse con un arbol de una sola pieza y que presente bastante rigidez para no doblarse; pero parece casi imposible cuando está interrumpido por manivelas.

Disposicion que debe adoptarse para las manivelas triples.

57. El único medio de evitar este grave defecto consiste en colocar los brazos de las manivelas sobre arboles separados, ó que lleven cuando mas dos brazos, y comunicar el movimiento á cada uno de estos árboles en particular, por medio de ruedas de engranage iguales montadas sobre un arbol comun paralelo á los de las manivelas. Esta disposicion, representada en la figura 23 se ha empleado ventajosamente en las forjas de Moyeuvre (Moselle) en vez de un aparato de manivelas triples que servia para hacer mover los émbolos de la máquina soplante de los altos hornos; pero cualesquiera que sean por otra parte las ventajas, su empleo no podrá impedir que existan grandes esfuerzos sobre los muñones y los cojinetes de los árboles, lo que dá lugar á rozamientos considerables.

Consideraciones dinámicas sobre los efectos de las manivelas.

Investigacion de la ley de variacion del trabajo de la potencia constante aplicada á una manivela simple respecto al trabajo medio de esta potencia.

58. Las consideraciones precedentes, análogas á las que existen en el libro 1º pag. 63 de la Arquitectura hidráulica de Belidor, edicion de Mr Navier, son puramente estáticas y concernientes únicamente á la ley de las variaciones instantáneas de la accion de las fuerzas aplicadas á las manivelas, ó la variacion del momento y del brazo de palanca propio de estas fuerzas; pero se puede mirar la cuestion de una manera muy diferente, y que se refiere especialmente á consideraciones dinámicas.

Conservando en efecto las denominaciones y supuestos del nº 51 relativas á la manivela simple, se puede tratar de hallar la ley de las variaciones mismas del trabajo finito de la potencia F, sea en media vuelta, sea en una entera de la manivela y comparar estos diferentes valores con los del trabajo uniforme de una potencia constante ó media aplicada tangencialmente á la circunferencia del círculo descrito por el extremo B de la manivela.

Suponiendo esta de simple efecto, de manera que la fuerza F no obre mas que en la semicircl-

ta ECG (fig. 18) y la cantidad de trabajo instantanea de F medida por $Fb \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$, la que habrá desarrollado á partir de la vertical AE y mientras que la manivela describe el ángulo $EAB = \alpha$ será evidentemente

$$\int_0^{\alpha} Fb \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = Fb(1-\cos\alpha) = F \times D'E$$

lo que se ve por otra parte, sin ningun cálculo, pues que F se supone constante. Esta última cantidad de trabajo que tiene por valor el producto $2Fb$, cuando la manivela ha descrito dos angulos rectos y ha vuelto á la posicion vertical; es tambien la que desarrollaria la componente $F \operatorname{sen} \alpha$ de F, que obra constantemente segun la circumferencia de circulo descrito por el punto de aplicacion B: ahora bien, si se reemplaza esta componente variable por su valor medio

$I = \frac{2Fb}{2\pi b} = \frac{1}{\pi} F = 0,3183 F$, relativo á una revolucion entera de la manivela, atendiendo á que se supone á esta de simple efecto; la cantidad de trabajo correspondiente al angulo cualquiera α descrito por el eje, será evidentemente $\frac{Fb\alpha}{\pi}$ cuyo exceso sobre la anterior tiene por valor $Fb\left(\frac{\alpha}{\pi} - 1 + \cos\alpha\right)$ en la primera media vuelta, y simplemente $Fb\left(\frac{\alpha}{\pi} - 2\right)$ en la segunda estando medidos los angulos α por los arcos que les corresponden sobre la circumferencia que tiene por rádio la unidad.

Discusion de esta Ley.

59. Discutiendo la primera de estas espresiones se se halla que es nula al mismo tiempo que α; que crece

positivamente hasta el valor de α determinado por la relacion $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\pi}$ ó $\alpha = \operatorname{arc}(\operatorname{sen} = \frac{1}{\pi}) = 0,1031\pi$ al cual corresponde un primer máximo positivo

$$Fb\left(\frac{\operatorname{arc}(\operatorname{sen} = \frac{1}{\pi})}{\pi} - 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\pi^2}}\right) = Fb(0,1031 - 1 + 0,948) = 0,051\,Fb;$$

que disminuye en seguida de manera que resulta nula en la proximidad de $\alpha = \frac{2}{\pi} = 0,2028\,\pi$; que resulta un máximo negativo para el valor

$$\alpha = \pi - \operatorname{arc}(\operatorname{sen} = \frac{1}{\pi}) = 0,8969\pi \text{ que dá}$$

$$Fb\left(\frac{\alpha}{\pi} - 1 + \cos\alpha\right) = Fb(0,8969 - 1 - 0,948) = -1,0511\,Fb;$$

que, en fin, su valor absoluto disminuye en todo el resto de la semivuelta hasta hacerse igual a $-Fb$ rigorosamente para la posicion vertical AG de la manivela que corresponde á $\alpha = \pi$.

En cuanto á la expresion de la diferencia relativa á la segunda media vuelta, permanece sin cesar negativa, y decreciente hasta que se hace nula para el valor $\alpha = 2\pi$ que corresponde á la posicion vertical superior AE de la manivela, despues de la cual vuelven á reproducirse los mismos valores que al principio.

Máxima diferencia entre el trabajo de la fuerza comunicado al sistema y el desarrollado por la fuerza media.

60. Asi la mayor separacion absoluta entre las cantidades totales de trabajo comunicadas por la fuerza variable $F\operatorname{sen}\alpha$ y la fuerza media $I = \frac{1}{\pi}F$ que se supone obran en la circunferencia del círculo descrito por el boton de la manivela, es igual á $1,0511\,Fb = 0,5255\,2Fb$; ó

excede á la mitad de la $2Fb$ que desarrolla F en una revolucion entera de esta manivela.

Caso de las manivelas simples de doble efecto.

61. En las manivelas de doble efecto (52) la cantidad de trabajo desarrollada por la fuerza constante F en la revolucion entera es $4bF$, lo que dá
$I = \frac{4bF}{2\pi b} = \frac{2F}{\pi} = 0,6366F$; la cantidad de trabajo de F ó de la componente $F \operatorname{sen} \alpha$ siendo siempre $Fb(1-\cos\alpha)$ y la del esfuerzo medio I, $Ib\alpha = \frac{2Fb\alpha}{\pi}$; el exceso de la una sobre la otra, tendrá por valor

$$Fb\left(\frac{2\alpha}{\pi} - 1 + \cos\alpha\right) \text{ en la } 1.^a \text{ semivuelta}$$

$$Fb\left(\frac{2\alpha}{\pi} - 3 - \cos\alpha\right) \text{ en la } 2.^a \text{ media vuelta},$$

lo que supone que se hacen crecer los angulos, ó los arcos α indefinidamente; pero bastará considerar lo que tiene lugar en la primera semivuelta, atendiendo á que todo se repite simétricamente en la segunda si se cuenta α á partir del rádio AG.

Ahora, la primera de estas espresiones se hace nula para los valores de $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\alpha = \pi$ y llega á su máximo positivo ó negativo para las dos posiciones intermedias que corresponden á

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\pi} = 0,6366$; de donde $\alpha = 0,21964\pi$, $\alpha = \pi - 0,21964\pi$ y

$$Fb\left(\frac{2\alpha}{\pi} - 1 + \cos\alpha\right) = Fb\left(2 \times 0,21964 - 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}\right) = 0,21039bF,$$

$$Fb\left(\frac{2\alpha}{\pi} - 1 - \cos\alpha\right) = Fb\left(2 \times 0,21964 + 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}\right) = -0,21039bF.$$

Asi el valor absoluto de la mayor separacion entre las cantidades de trabajo de las fuerzas $F \operatorname{sen}\alpha$ é I, es aquí solamente $0,0526 \times 4bF$; ó $\frac{1}{20}$ de la cantidad total

de trabajo desarrollada en una revolucion entera de la manivela, lo que debe entenderse del mismo modo respecto de las separaciones de la fuerza viva variable comunicada al sistema en el caso de un movimiento periódico, con respecto á la fuerza viva media, es decir, á la fuerza viva relativa á la velocidad media.

Consecuencias particulares relativas al movimiento de las bombas ó en general de las máquinas que tienen émbolos.

62. Suponiendo, por ejemplo, que se empleé la biela en mover el émbolo de una bomba, y observando que los volúmenes de las escursiones cilíndricas de este último, ó lo que es lo último, las cantidades de agua elevadas á la altura del depósito superior, son directamente proporcionales á las cantidades de trabajo correspondientes á la manivela, se concluirá de las discusiones que preceden, que en la bomba de simple efecto, la diferencia entre el volumen variable de agua que suministra, y el que suministraría un surtidor contínuo ó uniforme que diera la misma cantidad de fluido en una revolucion entera de la manivela, se elevaría á unas 0,83 próximamente de esta misma cantidad; mientras que en la bomba de doble efecto cuyo émbolo obra del mismo modo al subir que al bajar, la diferencia será solamente de $\frac{1}{20}$; ó $\frac{1}{10}$ próximamente si se la

compara al volumen de agua elevado en una simple semioscilacion del émbolo.

Estas consideraciones ponen en evidencia las ventajas inherentes al empleo de las manivelas de doble efecto, para regularizar la accion de las fuerzas, ó el producto de las bombas, y siguiendo esta investigacion no seria dificil de tratar el caso relativo á las manivelas múltiples; es decir, triples ó cuádruples.

De las manivelas que conducen piezas de movimiento rectilíneo alternativo

Investigacion del momento virtual, ó de la cantidad de trabajo instantánea de la fuerza aplicada á la biela.

63. Hasta aquí hemos supuesto que la direccion de la fuerza F ó de la biela era constante, lo que no se verifica casi nunca en la práctica á causa de que el estremo de esta biela opuesto á la manivela está ordinariamente sugeto á describir una línea recta, ó arcos de círculo de un rádio muy grande, respecto al brazo de esta manivela; es por lo tanto interesante examinar qué influencia puede tener esta circunstancia en los resultados anteriores y como se deben valuar entonces las relaciones que existen entre las velocidades, las fuerzas aplicadas y los momentos virtuales ó cantidades de trabajo relativos á estas fuerzas.

Considerando primeramente el sistema de una manivela AB fig.ª 24 sujeta á girar al rededor del eje A, y que obre por el intermedio de la biela BC sobre un punto C sujeto á describir con un movimiento alternativo la recta JM, cuya prolongacion pasa por A: supongamos á esta biela solicitada por la fuerza constante F que obra de arriba abajo ó de C hácia A para conducir á AB en la direccion indicada por la flecha de la figura. Hagamos, en fin, $AB = b$, $BC = l$, $AC = h$, $CAB = \alpha$ y $ACB = \varepsilon$. El triángulo ABC nos dará sin dificultad

$$h = b\cos\alpha + l\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad dh = -b\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha \left\{1 + \frac{b}{l}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}\operatorname{sen}^2\alpha}}\right\};$$

esta velocidad virtual del punto C es aqui negativa, porque la altura $h = AC$ disminuye cuando el ángulo $\alpha = BAC$ aumenta, pero como la fuerza F obra en el mismo sentido del camino $df = -dh$ (n.º 15, 1.ª seccion) descrito por su punto de aplicacion, su momento virtual deberá tomarse positivamente, de suerte que se tendrá

$$Fdf = -Fdh = b\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha\, F\left(1 + \frac{b}{l}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}\operatorname{sen}^2\alpha}}\right)$$

para el trabajo instantáneo de F; representando f aquí, si se quiere, el camino $b + l - h$ descrito por el punto C á partir de su posicion mas elevada.

Espresion simplificada y aproximada de este momento, y en general del trabajo de esta fuerza.

64. Se observará que el factor $Fb \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha$ no es mas que el momento virtual de la fuerza vertical F supuesta aplicada al boton B de la manivela; y como el segundo término del paréntesis es siempre muy pequeño respecto del primero ó de la unidad, se vé que las consecuencias espuestas en todo lo que precede se modificarán muy poco.

En efecto, el mayor valor absoluto que puede adquirir este segundo término, corresponde evidentemente á $\operatorname{sen}\alpha = 0$, lo que le hace igual á $\frac{b}{l}$. Ahora l escede ordinariamente 10 veces á b y nunca es menor que cinco veces b aun en las circunstancias mas desfavorables. Por otra parte, el mayor valor que puede adquirir el factor

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{l^2}\operatorname{sen}^2\alpha}}\ldots$$

corresponde evidentemente á $\operatorname{sen}^2\alpha = 1$ y por consiguiente se ve que aun suponiendo $l = 5b$ solamente, no será mayor que $\frac{5}{\sqrt{24}} = 1,0206$,
de suerte que el mayor valor de Fdf que corresponda á estas circunstancias será

$$Fdf = Fb \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha \left(1 + \frac{b}{l}\cos\alpha \times 1,0206\right)$$

y tomando solo para dicho valor la espresion mas sencilla

$$Fdf = Fb \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha \left(1 + \frac{b}{l}\cos\alpha\right) \quad (a)$$

el error cometido vendrá espresado por el término

$$Fb \operatorname{sen}\alpha \, d\alpha \times 0,0206 \frac{b}{l} \cos\alpha$$

cuya relacion con el valor tomado será

$$\frac{0,0206 \frac{b}{l} \cos\alpha}{1+\frac{b}{l} \cos\alpha} = \frac{0,0206\, b \cos\alpha}{l + b\cos\alpha}$$

que en la hipótesis mas desfavorable de ser $l = 5b$, $\cos\alpha = 1$, dicha relacion se convierte en $\frac{1}{291}$: por consiguiente puede tomarse por valor de Fdf la espresion (a) á menos de $\frac{1}{291}$ de su valor; lo que equivale á reemplazar simplemente F por $F(1+\frac{b}{l}\cos\alpha)$ en las consideraciones relativas á las manivelas solicitadas por una fuerza F cuya direccion permanece constante.

Se tendrá asimismo por aproximacion

$$h = b\cos\alpha + l - \frac{1}{2}\frac{b^2}{l}\operatorname{sen}^2\alpha; \quad \int_0^{\alpha} Fdf = Fb\left(1-\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{b}{l}\operatorname{sen}^2\alpha\right)$$

relaciones en que la última espresa la cantidad de trabajo desarollada por la potencia F sobre la manivela á partir de su posicion vertical AE, pero aquí el error cometido es mucho menor que para la espresion anterior Fdf, que se referia á un instante en que tenian lugar las circunstancias mas desfavorables.

Valor aproximado y construccion rigorosa de la relacion de las velocidades virtuales de la potencia y de la resistencia.

65. En fin, si se quiere comparar la velocidad virtual $-dh$ del punto C con la $bd\alpha$ de B, velocidad cuya relacion es precisamente igual á la relacion inversa de la fuerza F á la que le haria equilibrio, aplicá

cada en B tangencialmente á la circunferencia descrita por este punto, se tendrá al mismo grado de aproximacion

$$-\frac{dh}{bd\alpha} \text{ ó } \frac{df}{bd\alpha} = \operatorname{sen}\alpha\left(\frac{l+b\cos\alpha}{l}\right)$$

pero por sencilla que sea esta espresion se la sustituirá con ventaja en ciertos casos, la que resulta de la consideracion directa y rigorosa de los datos de la figura. En efecto, tendremos sin despreciar nada

$$-\frac{dh}{bd\alpha} = \frac{\left(\sqrt{l^2-b^2\operatorname{sen}^2\alpha}+b\cos\alpha\right)}{\sqrt{l^2-b^2\operatorname{sen}^2\alpha}}\operatorname{sen}\alpha$$

Ahora, si se prolonga AB hasta su encuentro I con la horizontal CI, y CB hasta su interseccion en O con la horizontal AO, despues se bajan de B y C las perpendiculares BK y CH sobre CI y BI, se tendrá evidentemente

$$-\frac{dh}{bd\alpha} = \frac{h\operatorname{sen}\alpha}{BK} = \frac{CH}{BK} = \frac{CI}{BI} = \frac{AO}{AB} \text{ de donde } \frac{df}{d\alpha} = AO,$$

lo que demuestra que tomando AB igual á la unidad el valor de la relacion de que se trata estará simplemente medido por AO.

Asi, siendo X la fuerza que aplicada tangencialmente á la circunferencia descrita por B, hace equilibrio á F, se tendrá

$$\frac{F}{X} = \frac{AB}{AO} \text{ ó } F \times AO = X \times AB$$

De suerte que F produce el efecto de una fuerza igual y paralela obrando en O, resultado al que se llega desde luego observando que el esfuerzo desconocido que se ejerce segun la direccion BC de la biela debe tener para componentes en C la fuerza vertical F y el esfuerzo hori-

zontal de reaccion que sufre la guia rectilínea del punto C. Trasladado dicho esfuerzo egercido segun la biela al punto O de su direccion, y haciendo de nuevo su descomposicion, su componente segun AO quedará destruida ó mas bien su brazo de palanca para hacer girar AB, será nulo; y la vertical no será mas que la fuerza F obrando con el brazo de palanca AO.

Principio general relativo á las velocidades de desviacion simultáneas de los diferentes puntos de un sistema material.

66. Pero se llega tambien á las mismas consecuencias por medio de un principio que creemos conveniente enunciar aquí, porque aclara mucho las cuestiones relativas á la ley del movimiento de los sistemas articulados en general; principio que se nos habia comunicado desde 1829 por Mr Bobillier, sabio profesor de las escuelas de artes y oficios y Mr Charles, otro geómetra distinguido, ha publicado á su vez, entre otros muchos, en el tomo XIV del Boletin de ciencias matemáticas de Mr Ferussac, pagª 321. Este principio consiste en que, si una figura plana, de forma y de magnitud invariables, aunque arbitrarias, esperimenta una desviacion cualquiera, infinitamente pequeña sin salir de este plano, tenderá á girar, sin resvalar, alrededor de cierto punto fijo, que se obtendrá por el encuentro de las normales á los elementos curvos que describen simultáneamente dos cualesquiera de sus

puntos de la figura.

Así, por ejemplo, en el caso que nos ocupa, todos los puntos de la biela BC tienden á girar simultáneamente alrededor de la interseccion I de las normales IC é IB á los elementos dh y $bd\alpha$ descritos por los puntos C y B, de modo que el angulo BIC permanece invariable en esta desviacion supuesta infinitamente pequeña. Se tiene por lo tanto, no considerando mas que las magnitudes absolutas,

$$dh : bd\alpha :: CI : BI.$$

Este teorema es muy importante, porque dá inmediatamente la velocidad de un punto cualquiera unido invariablemente á la recta BC por medio de la velocidad de uno de sus extremos B ó C, lo que permite tambien obtener la fuerza de un elemento material cualquiera, que forme sistema con la biela, y por consiguiente, la fuerza viva de la masa de esta misma biela.

Aplicacion de este principio á la investigacion de la fuerza viva y de la fuerza motriz de las bielas conducidas por una manivela

67. Llamando $d\theta$ el angulo infinitamente pequeño descrito por BC alrededor del punto I, mientras que B recorre el arco $bd\alpha$ ó C el arco $df = -dh$, dm un elemento cualquiera de la masa de la biela situado á la distancia ρ del eje de rotacion instantáneo, perpendicular al plano de la figura en I,

de su velocidad virtual, dirigida segun la perpendicular al extremo de ρ,

en fin, w la velocidad angular $\frac{d\alpha}{dt}$ de AB, i wb la velocidad efectiva; se tendrá primeramente:

$$df = -dh = CI\,d\theta \;;\; b\,d\alpha = BI\,d\theta \;;\; d\mathscr{C} = \rho\,d\theta = \frac{\rho b\,d\alpha}{BI}$$

y en seguida

$$\text{velocidad de } dm = \frac{d\mathscr{C}}{dt} = \frac{b}{BI}\rho\frac{d\alpha}{dt} = \frac{b\rho}{BI}w$$

fuerza viva total de la biela $= \frac{b^2w^2}{BI^2}\int \rho^2 dm$; integral que será preciso estender á la masa entera de esta biela.

Llamando además M á esta masa, G á la distancia de su centro de gravedad al eje de rotacion I, y A á su momento de inercia tomado respecto á un eje paralelo que pasa por su centro de gravedad, se tendrá mas sencillamente aun

$$\frac{b^2w^2}{BI^2}\int \rho^2 dm = \frac{b^2w^2}{BI^2}\left(MG^2 + A\right)$$

Se hallará del mismo modo la espresion de la fuerza motriz ó de inercia total de la biela &.

Por medio de los diferentes datos contenidos en este párrafo, será facil descubrir y discutir todas las circunstancias del movimiento y de la transmision de las fuerzas en el sistema de manivelas y bielas que acaba de ocuparnos últimamente. En particular será muy facil estender á este sistema general las consideraciones que en el párrafo anterior hemos aplicado al caso en que la biela permanece constantemente vertical ó paralela á si misma.

Aplicaciones particulares de la teoria de los volantes

Imposibilidad de descubrir una regla aplicable al establecimiento de toda clase de volantes.

77. Segun los principios generales espuestos en el numº 39 (1ª seccion) sobre la teoria de los volantes, es facil ver que no se podrá hallar una fórmula única que pueda servir para calcular sus dimensiones en todos los casos; y respecto de esto es imposible admitir las reglas universales que algunos autores prácticos han tratado de establecer. Cada especie distinta de irregularidad de accion de las potencias y de las resistencias exigirán una particular, y la teoria de los volantes no estará completa para la práctica sino cuando se haya aplicado á cada caso especial; así el volante de una serreria no puede calcularse como el de una máquina de vapor ni como el de un laminador. &. He aquí por qué nos limitaremos á manifestar en algunos ejemplos sencillos relativos á los sistemas de manivelas, el modo como se debe en cada caso particular, proceder á la solucion del problema; pero como esta solucion no dejaria de ser muy complicada si se quisieran tener en cuenta todas las circunstancias del movimiento, y todo lo que sucede en la estension entera de las máquinas, deberemos presentar aquí algunas reflexiones pro-

pias para evitar dificultades de cálculo que no tendrian objeto muchas veces para el fin que se trata de conseguir en el establecimiento de los volantes.

Simplificacion que puede hacerse en muchos casos en el cálculo de los volantes.

78. Desde luego se debe admitir como principio lo que se ha dicho en el nº 39, 1ª seccion, que el volante está colocado lo mas proximo posible á la fuerza que ejerce acciones irregulares y que debe asegurar la uniformidad del movimiento independientemente de la inercia de las piezas de rotacion que le suceden del lado opuesto á esta fuerza; porque de otro modo, estas piezas podrian quedar sugetas á alternativas de accion perjudiciales y peligrosas.

En seguida se observará que las resistencias pasivas cualesquiera que sea su naturaleza introducen en la ecuacion de las fuerzas vivas del nº 38 (1ª seccion) términos que no pueden entrar sino positivamente en el primer miembro relativo á estas fuerzas vivas, y negativamente en la espresion de S; por lo tanto, dichas resistencias contribuirán en muchos casos á disminuir las mayores variaciones de la velocidad, ó el valor que seria necesario dar al momento de inercia del volante, si estas circunstancias no tuviesen lugar, en otros términos, tenderán á regularizar por si mismas el movimiento, llenando así las funciones de un freno, y por consiguiente, despre-

ciándolas en semejantes circunstancias, se estará seguro de obtener para el volante, dimensiones mas que suficientes.

(a) Por otra parte, sucede casi siempre que las resistencias pasivas mas influyentes se desarrollan al trasmitir el motor su accion sobre el receptor, y el operador sobre la materia en que obra (41, 1ª seccion); en cuyas trasmisiones suelen ocurrir pérdidas de fuerza viva que apreciadas en los términos correspondientes de las fuerzas vivas, resultará que se habran tenido en cuenta al aplicar esta ecuacion al cálculo de los volantes, las pérdidas de accion mas influyentes, con solo haber disminuido en el término relativo al trabajo del motor el representado por la fuerza viva perdida; y aumentando en el término relativo al efecto útil, el trabajo que representa las pérdidas que tienen lugar en el operador. De este modo se puede prescindir sin grave error, y para simplificar los cálculos, de las demas resistencias pasivas que se desarrollan en las piezas comunicadoras del movimiento cuyos valores son relativamente bastante pequeños. Pero si se les considera de alguna consideracion puede tambien tomarse en cuenta su influencia en la ecuacion, apreciando los valores de sus trabajos medios, y agregándolos á los referentes á los del motor ú operador, ya como sustractivos del primero, ya como adicionales al segundo.

En fin, en otros casos muy complicados en que ha-

ya que considerar piezas de movimiento alternativo, habrá precision de despreciar la influencia dela inercia de algunas ó de la totalidad de estas piezas, no teniendo en cuenta así; mas que la irregularidad de accion de la potencia y de la resistencia, ó bien bastará hacer alguna hipótesis que tienda á simplificar el estado variable del movimiento de la máquina; como sucederia para la disposicion del número 63 (fig.ª 24), si se supusiere la biela BC sensiblemente vertical y en otros casos análogos en que podrán hacerse hipótesis que se separen muy poco de la realidad, especialmente cuando las longitudes de estas bielas son próximamente cinco veces la de la manivela AB.

Disposiciones mas generales á los volantes.

79. Para satisfacer cuanto es posible á las condiciones indicadas (nº 39), se componen ordinariamente los volantes de una corona de hierro fundido (fig.ª 25) unida al eje por brazos de la misma materia ó de hierro forjado que se ensamblan en un cubo montado sobre la parte cuadrada de este eje; y á los cuales se da ordinariamente cinco veces la longitud del rádio de la manivela que debe conducir. Casi siempre, la corona de que se trata recibe una seccion rectangular á la que se dá algunas veces tambien, así como á los brazos, una forma elíptica prolongada con el objeto de disminuir la resistencia del aire; pero no conoce-

mos ninguna esperiencia que ponga en estado de apreciar esta resistencia en el caso de que se trata, y es dudoso que vista la continuidad de la corona y la sucesion rápida de los brazos en un mismo espacio, tenga tanta importancia como si se tratase de superficies completamente aisladas. En fin, en las máquinas poco poderosas, suele bastar á veces con colocar al estremo de los brazos de hierro, adelgazados en sentido del movimiento, masas metálicas á las que se dá la forma lenticular siempre con objeto de disminuir la resistencia del aire; pero estas últimas disposiciones deben proscribirse á causa de los peligros que presentan.

Espresiones aproximadas y simplificadas del momento de inercia y de la fuerza viva de los volantes.

80 De cualquier modo que esten será siempre fácil por medio de las reglas que se esponen en la mecánica, hallar el momento de inercia $\int r^2 dm$ y la fuerza viva $w^2 \int r^2 dm$ (36) de semejante sistema. Consideremos en particular el caso de los volantes de anillo continuo y llamando P' el peso de este anillo, R su rádio medio, V la velocidad en el estremo de R, $g = 9^m,809$ la velocidad que mide la gravedad en cada lugar, se tendrá muy aproximadamente,

$$\int r^2 dm = \frac{P'}{g} R^2 \text{ y } w^2 \int r^2 dm = \frac{P'}{g} w^2 R^2, = \frac{P'}{g} V^2 \text{ (a)}$$

(a) En efecto, el momento de inercia de un circulo, es (Lecciones de Saave-

En cuanto á los brazos; si se llama P'' su peso total

---

dia nº 56)

$$I = \frac{\pi r^4}{4}\text{, siendo además } I' = I$$

El de una corona anular de radios r r' y anchura l será

$$I=\frac{\pi}{4}\left(r^4-r'^4\right)=\frac{\pi}{4}\left(r^2+r'^2\right)\left(r^2-r'^2\right)$$

llamando r_1 el rádio medio, los valores de r y r' serán $r=r_1+\frac{l}{2}$, $r'=r_1-\frac{l}{2}$: y por consiguiente $I=\frac{2\pi r_1 l}{2}\left(1+\frac{l^2}{4r_1^2}\right)r_1^2$

El momento polar será $A=I+I'$ ó $A=2\pi r_1 l\left(1+\frac{l^2}{4r_1^2}\right)r_1^2$

y el de una corona de altura e y volumen M

$$A=2\pi r_1 l e\left(1+\frac{l^2}{4r_1^2}\right)r_1^2=M r_1^2=\frac{P}{g}r_1^2$$

suponiendo que pueda despreciarse la fraccion $\frac{l^2}{4r_1^2}$

(b) Para hallar el momento de inercia de un brazo del volante le supondremos compuesto de dos refuerzos trapezoidales (fig. 26) uno perpendicular al eje del volante representado en la proyeccion de la izquierda y otro perpendicular al anterior, cuya magnitud aparece en el corte de dicha figura. Hallaremos el momento de inercia de cada uno de estos prismas respecto al eje del volante, y antes hallaremos el de un trapecio CH figª 27, con respecto á dos ejes rectangulares v y u situados en su plano.

Sean b, b' los lados paralelos de dicho trapecio y a la distancia EF que los separa

El momento de inercia respecto al eje vertical v será

$$B=\int_0^a dv\int_{-u=f(v)}^{+u=f(v)}u^2\,du \qquad (1)$$

los valores de u en funciones de v que entran en la segunda integral se deducirán por la proporcion

$$a:\tfrac{1}{2}(b-b')::v:u=\frac{b-b'}{2a}v$$

los cuales corresponderán á una recta DD' paralela al lado del trapecio, por consiguiente dichos valores habrán de aumentarse en la constante $\frac{b'}{2}=DC$ y la integral segunda de (1) será

$$\int_{-\frac{b-b'}{2a}v+\frac{b'}{2}}^{+\frac{b-b'}{2a}v+\frac{b'}{2}}u^2\,du=\frac{2}{3}\left[\frac{(b-b')^3v^3}{8a^3}+\frac{3(b-b')^2v^2}{4a^2}\frac{b'}{2}+\cdots\cdots\right.$$

se podrá seguir las mismas reglas tomar muy apropi-

...... $\frac{3(b-b')v}{2a} \frac{b'^2}{4} + \frac{b'^3}{8}\Big)$

por consiguiente la integral total (1) será, hechas todas las reducciones.

$$B = a\left(\frac{b+b'}{48}\right)(b^2+b'^2) \ldots (2)$$

El momento de inercia del mismo trapecio respecto al eje u se compondrá de los momentos del rectángulo $EFD'C$ y del doble triángulo EFE' que son respectivamente (Lecc.ˢ de S. n.ᵒˢ 53 y 54)

$$\frac{b'a^3}{3} \quad y \quad \frac{2(b-b')a^3}{24}$$

cuya suma será despues de hechas las reducciones $C = \frac{a^3(3b'+b)}{12} \ldots (3)$

Los dos valores (2) y (3) puestos en funcion del área del trapecio que llamarémos S se convierten en

$$B = \frac{Sa^2}{6}\left(\frac{b^2+b'^2}{4a^2}\right) \ldots (4); \qquad C = \frac{Sa^2}{6}\left(\frac{3b'+b}{b+b'}\right) \ldots (5)$$

El momento de inercia respecto al eje perpendicular á los v y u en su punto de interseccion, será,

$$A = B + C = \frac{1}{6} Sa^2\left(\frac{b+3b'}{b+b'} + \frac{b^2+b'^2}{4a^2}\right) \ldots (6)$$

Los valores (5) y (6) nos darán los momentos de inercia de los dos refuerzos trapezoidales de un brazo de un volante (fig.ª 26) respecto al eje AA del mismo, multiplicándolos por el espesor e de dichos refuerzos.

En efecto, llamando

b y b' los lados paralelos del trapecio perpendicular al eje del volante,

B y B' los relativos al otro refuerzo trapezoidal,

R_1 su separacion ó radio medio del volante,

U el volumen del primer refuerzo,

U' el del segundo, se tendrá,

$$U = \left(\frac{b+b'}{2}\right)R_1 e \qquad U' = \left(\frac{B+B'}{2}\right)R_1 e\,;$$

sus pesos serán πU, y $\pi U'$, siendo π el peso específico, y la espresion de su momento de inercia será

$$I = \frac{\pi}{g}\left[\frac{1}{6}U\left(\frac{b+3b'}{b+b'} + \frac{1}{4}\,\frac{b^2+b'^2}{R_1^2}\right) + \frac{1}{6}U'\,\frac{B+3B'}{B+B'}\right]R_1^{\,2}\,;$$

Suponiendo que $B = \frac{6}{5}B'$; $b = \frac{6}{5}b'$ será $\frac{b+3b'}{b+b'} = 1{,}9$ ó á lo más $1{,}95$: y lo mismo $\frac{B+3B'}{B+B'}$: si ademas puede considerarse despreciable el valor de $b^2+b'^2$ respecto de R_1^2 se reducirá el valor anterior á ....

madamente $w^2 \int r^2 dm = 0,325 \frac{P''}{g} R_1^2$ (nota b) lo que da para la fuerza viva total del volante

$$\frac{(P' + 0,325\, P'')\, V^2}{g}$$

que representaremos simplemente por $\frac{P}{g} V^2$ sea que se quiera tener en cuenta ó no el momento de inercia de los brazos que cuando mas no podria exceder el $\frac{1}{6}$ ó el $\frac{1}{5}$ de toda la corona.

Momento de las fuerzas que resultan de los cambios de velocidad y tienden á romper los brazos del volante.

81. El volante esta espuesto principalmente á la accion de la fuerza centrífuga que tiende a separar violentamente los brazos y los segmentos de que se compone la corona y á la accion de la fuerza motriz ó de inercia que nace de la variacion instantánea del movimiento de rotacion y tiende principalmente á romper los brazos en su empotramiento cerca del arbol y del anillo. Puede apreciarse una de estas acciones ó la otra por medio de un cálculo rigoroso cuando la constitucion de la máquina á que el volante está aplicado, es bien conocida.

Conservando siempre las mismas denominaciones se observará que $\frac{w^2 r^2}{r} dm = w^2 r dm$ es la espresion de la fuerza centrífuga de un elemento de masa dm, situado á la distancia r del eje, mientras que $\frac{dw}{dt} r dm$, tomado haciendo abstraccion del signo, es la de su fuerza motriz

---

$$I = \frac{\pi}{g} \left[\frac{1}{6} \times 1,95 (V + V') \right] R_1^2 = 0,325 \frac{P''}{g} R_1^2$$

que es el momento de inercia aproximado de los brazos del volante.

ó de inercia tangencial (nº 14, 1ª seccion) cuyo momento respecto al eje, tiene así por valor $\frac{dw}{dt} r^2 dm$, lo que dá para calcular en un instante dado la fuerza total X_1 que, obrando en el estremo del radio medio R_1 del anillo, ó segun su circunferencia media, seria capaz de hacer equilibrio á la accion de las fuerzas que nacen de la variacion instantánea del movimiento de rotacion, la espresion (80)

$$X_1 = \frac{1}{R_1} \frac{dw}{dt} \int r^2 dm = \frac{1}{R_1} \frac{dw}{dt} \frac{P' + 0,325 P''}{g} R_1^2 = \frac{dw}{dt} \frac{PR_1}{g}$$

considerando toda la masa del volante y de los brazos.

Asemejando esta fuerza á un esfuerzo de torsion, que tendiese á romper el brazo en su empotramiento con una energia medida por el momento $\frac{dw}{dt} \frac{PR_1^2}{g}$, será facil aplicar la teoria de la resistencia de los solidos (*) á la parte de la cuestion que nos ocupa, cuando se haya hallado para el sistema formado por el arbol del volante y de las piezas que dan lugar á la irregularidad del movimiento, el máximo del valor $\frac{dw}{dt}$, que para un instante ó una posicion cualquiera estará dado (nºs 37 y 38 de la 1ª seccion) por la ecuacion

$$(A+B)\, w\, dw = (A+B) \frac{dw}{dt} d\alpha = F df - Q dq - \&c = dS$$

designando A especialmente la suma de los momentos de inercia de las piezas de movimiento de rotacion conti-

(*) Vease el resumen de las lecciones dadas en la Escuela de puentes y calzadas sobre la aplicacion de la mecanica á las construcciones, &c por Mr. Navier, Paris 1833, ó la litografia del curso de Mr. Persoy, en la Escuela de aplicacion de Metz. Haremos observar respecto á esto que, como los brazos se hallan empotrados en los dos estremos convendrá igualar el momento de potencia á la suma de las resistencias que obran en los dos empotramientos conservando á esta potencia un brazo de palanca igual á la longitud de estos brazos.

mo que forman parte con el arbol del volante; B una suma análoga relativa á las piezas oscilantes del sistema y cuyo valor se podrá obtener en funcion del angulo α descrito por el arbol de que se trata, con ayuda de las consideraciones espuestas en los numeros 66 y siguientes; en fin, representando por F si se quiere, la potencia de accion variable, Q la resistencia constante que obra sobre la rueda motriz del arbol del volante &c. De aquí se sacará para calcular $\frac{dw}{dt}$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{F\frac{df}{d\alpha}-Q\frac{dq}{d\alpha}-\&c}{A+B}$$

Las cantidades que entran en esta espresion son todas, ó constantes, ó funciones del angulo α que fija la posicion del sistema; no habrá, pues, mas que buscar su máximo por los métodos ordinarios ó por procedimientos análogos á los de los números 66 & ya citados, para obtener el de la fuerza de inercia total X, que en el caso de un choque ó cambio brusco cualquiera de velocidad podrá adquirir gran intensidad, cuyos efectos deberán apreciarse segun los principios de mecánica que se aplican al choque de los cuerpos.

Fuerza que necesitan los brazos de los volantes y sus bridas para resistir á la accion de la fuerza centrífuga.

83. Si el volante se compone de muchos segmentos (figª 28) ensamblados en sus extremos con los brazos, habrá que descomponer las fuerzas centrífugas de los elementos de uno cualquiera de sus segmentos en otras dos, que obren en sus extremos segun la direccion media de los brazos:

correspondientes: sumar estas componentes y duplicar su valor para tener la fuerza que tiende á romper cada brazo ó la brida que le sugeta á la corona, á cuya fuerza se podrá añadir además, el peso de esta corona para tener en cuenta la accion de la gravedad sobre la parte inferior de la misma.

La descomposicion de que se trata se facilitará mucho por el principio siguiente, muy fácil de establecer.

Si un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo, puede descomponerse en capas planas infinitamente delgadas, perpendiculares á este eje y cuyos centros de gravedad esten situados sobre una recta paralela á él, teniendo por otra parte, el cuerpo una forma y una situacion cualquiera; ó bien sobre una linea arbitraria comprendida toda entera en un plano que pase por este ege, estando entonces dividido el cuerpo simétricamente por un plano perpendicular á este ege mismo, y que contiene el centro de gravedad, la fuerza centrífuga de este cuerpo es la misma que si toda su masa estuviese reunida en el centro de gravedad (*).

Asi, siendo G el centro de gravedad del segmento AB; $\frac{P'}{2}$ su peso; su fuerza centrifuga estará dirigida segun CG y tendrá por intensidad.....

(*) La demostracion de este principio está fundada en consideraciones análogas á las que se hallan espuestas en la litografia del curso de mecánica hecho en 1828 y 1827 para los obreros de la ciudad de Metz nº 69, pagª 45 y 46.

$\frac{P'}{ig} w^2 CG = \frac{P'}{ig} w^2 \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha}{\alpha} R_1$; siendo α el arco que mide el angulo ACB de los brazos en el circulo cuyo radio es la unidad.

Se tendrá, pues, para la fuerza que tiende á hacer salir la corona de su empotramiento en A ó en B tirando en direccion del brazo correspondiente CA y CB

$$4 w^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha R_1}{\alpha \operatorname{sen} \alpha g} \cdot \frac{P'}{i}, \text{ ó } \left(4 w^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha R_1}{\alpha \operatorname{sen} \alpha g} + 1\right) \frac{P'}{i},$$

añadiendo como hemos dicho, el peso de una porcion de corona á la accion de la fuerza centrifuga; pero como las diferentes partes de los brazos están solicitadas por la accion de la fuerza centrifuga, convendrá tener en cuenta esta circunstancia para determinar la seccion de mas fácil rotura de estos brazos y de los tirantes ó bridas que los unen á las coronas, sino se hubiera aumentado en una relacion conveniente su espesor, á partir de la circunferencia hácia el centro.

Cálculo del volante de las manivelas de simple y de doble efecto en las hipótesis mas sencillas

Consideraciones y observaciones preliminares

86. En lo que sigue, nos propondremos hallar las dimensiones del volante necesario para asegurar la uniformidad del movimiento del arbol de una manivela, que obra por intermedio de una biela de direccion y de accion constantes conforme á los supuestos del numero 50 y siguientes, despreciando el peso y

la inercia de las piezas del sistema que poseen movimiento alternativo. Admitiremos desde luego con Mr. Navier, que es el primero que ha tratado esta cuestion en las notas del primer tomo de la Arquitectura hidráulica de Belidor, pag.ª 388 y siguientes, que la accion de la potencia F (fig.ª 29) aplicada á la manivela, se emplea en hacer elevar el peso Q por intermedio de una rueda de radio r montada sobre el arbol de esta manivela ó del volante, y de cuya inercia prescindiremos por ahora: pero abandonaremos despues esta hipótesis particular, y simplificaremos mas que lo ha hecho este geómetra, las formulas definitivas que deben servir para las aplicaciones numéricas y prácticas.

Caso particular de una manivela de simple efecto, solicitada por un peso constante.

87. Considerando en primer lugar el caso en que la potencia F obra solamente descendiendo en la semivuelta ECG y conservando todas las denominaciones admitidas en los números 51 y siguientes, se establecerá (40. Seccion 1.ª) la ecuacion de condicion

$$2bF = 2\pi r Q \quad ó \quad bF = \pi r Q$$

para espresar que las fuerzas F y Q desarrollan cantidades de trabajo iguales en cada una de las revoluciones del arbol de la manivela, de modo que se asegure la permanencia del movimiento cuando el sistema haya adquirido la velocidad media ó de

régimen que debe conservar y que representaremos por ...

Siendo $Fb \operatorname{sen}\alpha$ y Qr los momentos de las fuerzas F y Q para una posicion cualquiera de la manivela, estas dos fuerzas se harán mutuamente equilibrio en las posiciones de la manivela, en que se verifique $Fb \operatorname{sen}\alpha = Qr$; lo que da á causa de

$Fb = \pi r Q$; $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\pi} = 0,3183$, valor que corresponde á dos ángulos suplementarios EAB, EAB' y á dos radios AB, AB' simétricos respecto del diámetro horizontal CH.

Ahora bien, es fácil ver que la cantidad de trabajo $F(b - b\cos\alpha) - Qr\alpha$ comunicada por estas fuerzas al sistema á partir de la posicion vertical AE de la manivela, para la cual $\alpha = 0$, (figura), así como la velocidad y la fuerza viva, á su valor mínimo en B, y máximo en B'; despues disminuirá constantemente con la una y la otra, mientras que la manivela describa el arco $B'GHB$, al cabo del cual dicha espresion tendrá los mismos valores que antes, aproximándose á su valor medio hacia C y H: y así sucesiva y alternativamente, pues que la cantidad de trabajo comunicada en una vuelta entera, es nula en virtud de la relacion $Fb = \pi Q r$.

La analogía de estas consideraciones con las que resultan de la discusion establecida en el númᵒ 89 aparecerá evidente por otra parte, si se observa que aquí el sistema se supone poseer una fuerza viva superior ó cuando menos igual al máximo ...

$2F(1-b\cos\alpha)-2Qr\alpha$ que pueden comunicar simultaneamente las fuerzas F y Q aplicadas á este mismo sistema.

Ahora, se observará que como el trabajo desarrollado por estas fuerzas separadam.te en el intervalo BCB', es para la primera $BB'\times F = 2b\cos\alpha F = 2b\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}F$; y $Q\,\text{arc}\,BCB' = Qr2\,\text{arc}\left(\cos=\frac{1}{\pi}\right)$ para la segunda, la que comunicarán simultáneamente á la máquina en este mismo intervalo tendrá por valor

$$2\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}\,bF-2\,\text{arc.}\left(\cos=\frac{1}{\pi}\right)rQ$$

la cual se deberá igualar á la mitad de la fuerza viva comunicada al peso Q y al volante entre las dos posiciones del sistema de que se trata.

Se tendrá, pues, segun el núm.o 38 de la 1.a seccion; para determinar la fuerza viva $\frac{P}{g}\Omega^2R_1^2$, ó $\frac{P}{g}V^2$ del volante cuando se dé la relacion $n=\frac{d}{\Omega}$ que se quiere establecer entre el exceso de la velocidad máxima sobre la mínima, con la velocidad media,

$$PV^2+Q\Omega^2r^2=\frac{2g}{n}\left[\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}}\,bF-\text{arc}\left(\cos=\frac{1}{\pi}\right)rQ\right]$$

que equivale á la ecuacion dada por M.r Navier en la pag.a 390 de la obra citada. Se demostraria además muy facilmente con este geómetra, que se llega á un resultado equivalente, considerando lo que sucede en la porcion de vuelta $B'HB$.

Determinacion de la fuerza de inercia total que solicita los brazos en este caso.

88. Si se quiere obtener para las hipótesis actuales

la espresion del máximo dela cantidad $\frac{dw}{dt}$ (81) que sirve para calcular la fuerza que conviene dar á los brazos del volante, para que puedan resistir á las fuerzas motrices y de inercia que nacen de la variacion instantánea del movimiento, se observará que la cantidad de trabajo desarrollada sobre el sistema, mientras que describe el ángulo $d\alpha$, es $Fb \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$, de suerte que se tiene generalmente pª. la primera semivuelta

$$\frac{dw}{dt} = \frac{Fb \operatorname{sen} \alpha - Qr}{A} = g \frac{(Fb \operatorname{sen} \alpha - Qr)}{PR_{,}^{2} + Qr^{2}}$$

despreciando siempre el peso y la inercia de las bielas, de la manivela &. Ahora esta espresion adquiere su mayor valor absoluto para la posicion en que se tiene $\operatorname{sen} \alpha = 1$; ó $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; lo que dá para su máximo la cantidad $g\frac{(Fb - Qr)}{PR_{,}^{2} + Qr^{2}}$

y para la fuerza de inercia total y máxima que obra en el estremo del rádio $R_{,}$ (81)

$$X = \frac{(Fb - Qr)}{PR_{,}^{2} + Qr^{2}} \; PR.$$

Caso de las manivelas de doble efecto.

89. Si la fuerza F obra á la vez en las dos semivueltas (52 y 61) se estableceria la ecuacion

$$4Fb = 2\pi r Q \;\; \text{ó} \;\; 2Fb = \pi r Q$$

y siempre $Fb \operatorname{sen} \alpha = Qr$ para determinar las posiciones de equilibrio que evidentemente serán dos en cada media vuelta, y simétricas respecto á los dos diámetros CH y EG; de suerte que la velocidad y la fuerza viva serian las mismas para los puntos B y B' y los que están diametral y respectivamente opuestos en el semi-

circulo EHG. No habrá pues, mas que ocuparse de lo que sucede en la primera media vuelta ECG, siempre que el ángulo EAB cuyo seno era anteriormente $\frac{1}{\pi}$ se reemplace por el que tiene ahora su seno igual á $\frac{2}{\pi}$, en virtud de las ecuaciones anteriores.

Segun esto, se obtendrá en las hipótesis actuales y conservando las mismas denominaciones

$$PV^2 + Q^2\Omega^2 r^2 = \frac{2g}{n}\left[\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}\,Fb - arc\left(cos = \frac{2}{\pi}\right) rQ\right]$$

como lo ha hallado tambien Mr. Navier en el lugar citado.

En cuanto á los máximos de $\frac{dw}{dt}$ y de la fuerza de inercia total X, es claro que permanecerán los mismos que en el caso anterior, y continuarán teniendo lugar para las posiciones horizontales de la manivelas, relativas á cada semi-revolucion.

Simplificacion de las fórmulas relativas al caso en que el peso esté reemplazado por una fuerza cualquiera.

90. Se observará que las ecuaciones y las espresiones que acabamos de esponer, se refieren únicamente al caso en que la fuerza Q es un peso verdadero cuya inercia debe tomarse en consideracion, porque contribuye á regularizar la accion de la fuerza F.

Si Q fuese simplemente un esfuerzo constante ejercido en la circunferencia de la rueda de radio r, y que se despreciase además la inercia de esta rueda, como conviene hacerlo, el termino $Q\Omega^2 r^2$ deberia

desaparecer de estas ecuaciones, que resultarán respectivamente.

1.º para el caso de las manivelas de simple efecto

$$PV^2 = \frac{10,8109\,\pi\,Qr}{n}$$

atendiendo á que se tiene $\pi = 3,1416$; $arc(\cos = \frac{1}{\pi}) = 0,39692\,\pi$, $g = 9,^m8088$ y $Fb = \pi Q r$.

2.º para el caso de las manivelas de doble efecto.

$$PV^2 = \frac{2,0645\,\pi\,Qr}{n}$$

atendiendo á que se tiene

$$arc(\cos = \frac{2}{\pi}) = 2,8036\,\pi,\quad Fb = \frac{\pi}{2}\,Qr.$$

Espresion de la fuerza viva del volante en funcion del número de caballos de la máquina y de las revoluciones que hace por minuto.

91. En la industria se evalua ordinariamente la potencia de las máquinas por el número de caballos de fuerza ó dinámicos (7) que desarrolla en ellos el motor; y su velocidad, por el número de revoluciones del receptor ó del operador en un minuto.

Ahora bien: siendo m este último número; $m \times \frac{2\pi r}{60} Q$ será evidentemente, en el caso que nos ocupa, la cantidad de trabajo desarrollada por Q ó F en un segundo, tomado por unidad de tiempo; y por consiguiente, si se llama N el número de caballos dinámicos de la máquina, equivalentes cada uno de ellos á 75^{Km} por segundo (n.º 7, 1.ª seccion), se tendrá

$$N = \frac{m \cdot 2\pi r}{60 \times 75}\,Q \quad \text{de donde} \quad \pi Q r = \frac{2250}{m}\,N$$

Sustituyendo este valor en las espresiones anteriores

de la fuerza viva del volante, se hallará, para el caso de las manivelas de simple efecto.

$$PV^2 = 24324 \frac{N}{m.n}$$

y para el de las manivelas de doble efecto

$$PV^2 = 4645 \frac{N}{m.n}$$

Estas fórmulas concuerdan con los resultados obtenidos en los números 60 y siguientes, para probar las ventajas inherentes á las manivelas de doble efecto para regularizar el movimiento de las máquinas, independientemente de la accion del volante; se vé que dichas fórmulas se prestan facilmente al cálculo cuando se conocen los números m, n y N en que el último debe siempre tomarse por el número de caballos de la potencia que representa todas las resistencias reunidas (78) que obran sobre el arbol de la manivela, mientras que el 1.º ó m que designa el número de revoluciones de la máquina por minuto, se refiere esencialmente á este mismo arbol y no al volante, que se establece algunas veces sobre un arbol diferente á fin de darle mayor velocidad:

Valor que debe adoptarse para el n.º n que marca el grado de regularidad que se debe obtener.

92. El mayor valor que se puede adoptar para el número n en las espresiones anteriores de la fuerza viva del volante, es relativo á la hipótesis en que la velocidad y la fuerza viva mínima del sistema fuesen nulas, lo que corresponde á n=2, pues que se tiene

entonces (nº 38, seccion 1ª) $\Omega = \frac{d}{2}$; pero pasado este término, qué valor se adoptará para n^2?. Esta cuestion no se puede evidentemente resolver, más que en casos particulares, y segun los datos relativos á la constitucion, á la especie de la máquina y á su objeto; pues que será preciso comparar las ventajas de la mayor ó menor uniformidad de su velocidad con los inconvenientes que son por otra parte inherentes al aumento de los momentos de inercia y de los pesos.

Las fórmulas anteriores son aplicables ordinariamente en la práctica, al cálculo de los volantes de las máquinas de vapor; y cuando estas han de proporcionar movimientos muy regulares como sucede en las que se emplean en las fábricas de hilados, el valor de n que los ingleses suelen adoptar, es solamente de $\frac{1}{30}$ pero se le considera como escesivamente pequeño.

Idea sobre el cálculo de otros volantes.

(a) El ejemplo anterior referente á las manivelas no puede tener aplicacion en muchas circunstancias. En él hemos supuesto la resistencia constante, y la fuerza motriz tangencial, variable. Puede suceder, por el contrario, que esta sea constante y que la resistencia varíe, ya porque el operador tenga un movimiento alternativo como sucede en las sierras, ya porque la duracion de la resistencia cambie continuamente; ó por último, que esté sujeta á in-

termitencias. Los cálculos son diferentes en unos casos que en otros para determinar las dimensiones del volante que regularice estos movimientos. Convendrá siempre estudiar la accion en un periodo ó revolucion completos, y hallar las dos posiciones de equilibrio, en las que el trabajo instantáneo de la potencia es igual al de la resistencia; porque á estas dos posiciones corresponde el instante en que la velocidad está en su máximo y en su mínimo. Si ademas se calculan las cantidades de trabajo desarrolladas por la potencia y resistencia en el intérvalo de estas posiciones, y se iguala el doble de su diferencia absoluta á la variacion del fuerza viva del volante, esta relacion unida á la condicion que exprese el grado de regularidad que se desee obtener, conducirá á determinar las dimensiones del volante; pero como estos cálculos varian en cada clase de máquina, daremos algunos otros ejemplos que pueden servir de guia en estas cuestiones.

1.º Laminadores. Un laminador consiste en dos cilindros de hierro fundido, en posicion muy próxima y paralela, que giran con un movimiento convergente del lado en que se presenta la barra de hierro enrojecida, y divergente del lado en que sale esta barra. Se alarga y comprime en cada uno de estos pasos; pero como su longitud es limitada, despues de haber pasado la barra una vez por los cilindros, hay que trasladarla por encima del

laminador, para volverla á presentar á su accion, de suerte que el trabajo del laminador no es continuo, sino intermitente.

Como el motor obra continuamente, la velocidad va aumentando durante dichas intermitencias, y llega á su límite superior en el momento en que la barra se presenta á la accion del laminador; despues, disminuye, porque el trabajo instantáneo de la resistencia del hierro excede al del motor y llega á su límite inferior en el momento en que la barra sale del laminador. La determinacion de las dimensiones del volante es aquí muy sencilla porque las dos posiciones de velocidad máxima y mínima son fáciles de determinar, como acabamos de ver; de modo que si por la observacion ó por el cálculo se puede conocer la cantidad de trabajo necesaria para hacer pasar la barra por el laminador, y se resta de ella la que el motor ha desarrollado durante este paso, el doble de esta diferencia será igual á la perdida de fuerza viva del volante desde su velocidad máxima á la mínima.

Siendo, pues. S la diferencia de estos trabajos, V y v las velocidades maxima y mínima de la circumferencia media del volante, y P el peso de este, se tendrá la relacion

$$\frac{P}{g}(V^2 - v^2) = 2S$$

Este volante debe estar colocado en el arbol de

uno de los cilindros, y como estos deben hacer, termino medio, veinte revoluciones por minuto, se conocerá la velocidad media V, del volante. Si además se establece la condicion de que $n = \frac{V-v}{V}$ sea $\frac{1}{15}$ ó $\frac{1}{20}$, se podrá calcular el peso P en la ecuacion anterior. Pero debe haberse fijado de antemano, como condicion necesaria para la permanencia del movimiento que en cada periodo ó revolucion, el trabajo del motor sea igual al de la resistencia opuesta por la barra, mas el de los rozamientos en los ejes

2º. Sierras. El volante de una serreria exige consideraciones muy distintas que el de un laminador. Sabido es que el movimiento vertical de vá-y-ven se transmite al bastidor de la sierra por una biela ligada en su otro extremo á una manivela fija á un arbol que recibe el movimiento del motor. En esta disposicion, la sierra solo trabaja al descender; de modo que al subir solo obra sobre el boton de la manivela el peso de la biela y del bastidor; pero al bajar, este peso favorece á la accion de la potencia para vencer la resistencia de la sierra. Esta ultima es variable con el espesor y naturaleza de la madera aserrada; pero se puede tomar el valor medio que corresponda á una pieza de encina de un pié de escuadria. Entonces se estará en el caso de averiguar el valor del trabajo instantáneo de la potencia en dife

rentes posiciones, y determinar las que corresponden á trabajos elementales iguales de la potencia y la resistencia en una revolucion completa. A estas posiciones corresponderan las velocidades máxima y mínima. Si se calculan despues las cantidades de trabajo totales desarrolladas por la potencia y resistencias durante el intérvalo de estas velocidades límites, y se iguala el doble de su diferencia á la variacion de fuerza viva del volante, se deducirá el peso que debe tener este último, para que las velocidades permanezcan dentro de límites asignados de antemano.

3.º Hilados. Hay ciertas máquinas cuyas piezas tienen movimientos contínuos y en las que tienen lugar cambios que hacen su accion muy irregular. Tales son las de hilados, cuyos operadores se mueven simultáneamente por un mismo motor pero que alguno de ellos deja de funcionar momentaneamente y á voluntad del obrero que le dirige sin que por esto pueda modificarse el trabajo del motor.

Seria dificil arreglar el movimiento si no se hiciese una observacion detenida de la marcha del taller para apreciar aproximadamente el número de operadores que por término medio interrumpen su trabajo y por cuanto tiempo.

Suponiendo, por ejemplo, que el trabajo

reunido de todos equivalga á 24 caballos y que se reduzca á 20 cuando se suspenden tres ó cuatro operadores durante un número t de segundos, el trabajo de la resistencia se disminuye así durante este tiempo en $20 \times 75 \times t$.^{km} Suponiendo además que el trabajo del motor sea de 23 caballos: el esceso de este trabajo sobre el de la resistencia reducida por la interrupcion de los cuatro operadores, será de $23 - 20 = 3$ caballos. Este esceso repetido durante t segundos, equivaldrá á $3 \times 75 \times t$, y producirá al cabo de este tiempo en el volante una velocidad V mayor que la velocidad V_1 de régimen de la máquina. Luego $\frac{P}{g}(V^2 - V_1^2)$ será el incremento de fuerza viva del volante y será igual á $2 \times 3 \times 75 \times t$ ^{km}; y se tendrá

$$\frac{P}{g}(V^2 - V_1^2) = 2 \times 3 \times 75 \times t.$$

Si se quiere que la velocidad V no esceda á V_1 mas que en $\frac{1}{10}$, se pondrá

$$V = \frac{11}{10} V_1, \text{ ó } V^2 = 1,21 V_1^2 \text{ ; de donde}$$

$$\frac{P}{g} \times 0,21 V_1^2 = 450\,t, \text{ ó } PV_1^2 = \frac{9,81 \times 450\,t}{21}$$

De esta relacion se deducirá el peso del volante pero en vez de $\frac{1}{10}$ deberá tomarse la fraccion $\frac{1}{15}$ ó $\frac{1}{20}$.

Cuando la fábrica de hilados tiene por motor una máquina de vapor, se determina el volante de esta última, independientemente de la rou

sideracion de los operadores y se hace $n = \frac{1}{30}$ para que sea el volante mas enérgico. Tal es el metodo seguido por los ingleses. Creemos, sin embargo que es preferible calcular este primer volante haciendo $n = \frac{1}{15}$, y calcular en seguida otro volante para regularizar los operadores. Si el peso de este último volante es mayor que el hallado para la máquina de vapor, es prueba de que n debe ser menor de $\frac{1}{15}$, y es preciso aumentarle. Si es menor, es prueba que basta el primer volante de la maquina de vapor. En este género de máquinas, es mas necesaria la regularidad del movimiento, pues de ella depende la perfeccion del trabajo.

Si se tratase de un molino movido por una rueda hidráulica, no hay necesidad de volante, porque la muela hace funciones de tal. Pero si el molino marcha por una máquina de vapor, esta no necesitará un volante tan poderoso, y en general esta clase de máquina debe regularizarse independientemente del útil, salvo el regularizar este último si sus intermitencias fueron muy grandes.

Curso de Mecánica
aplicada a las máquinas

Seccion tercera.

Cálculo de las resistencias pasivas en las piezas de movimiento constante y sometidas á acciones sensiblemente invariables

Consideraciones preliminares

Descomposicion de las máquinas compuestas en máquinas simples.

1 Al hablar del establecimiento de las máquinas en general, (44) hemos (*) dado una idea sucinta de la manera de proceder en el cálculo de la fuerza motriz que debe vencer todas las resistencias reunidas: esto consiste en considerar separadamente cada pieza distinta y móvil del sistema como una máquina simple sometida á una potencia y á resistencias que se equilibran en todos los instantes; ó cuya suma de cantidades de trabajo instantáneas es constantemente igual á cero (15). La fuerza motriz y la resistencia útil ó activa aplicadas á cada una de ellas, no son en efecto mas que los esfuerzos de reaccion que experimenta de parte de la que precede inmediatamente del lado

(*) Todas las citas de los preliminares se refieren á la 1.ª seccion.

del motor, ó que le sucede del lado del operador; se concibe por lo tanto, como por medio de las reglas ordinarias de la estática, se puede llegar á calcular sucesivamente partiendo de una cualquiera de las piezas estremas de la máquina, el valor de las diferentes fuerzas pasivas ó activas que la solicitan en un instante dado, sea en funcion de la presion motriz del receptor, sea de la resistencia util del operador; y por consiguiente, como se puede tambien calcular (nº 8 y siguientes) para cada una de estas fuerzas, la cantidad de trabajo positivo ó negativo (19) que trasmite á la máquina en cada elemento de tiempo, entre cada dos posiciones dadas cualesquiera.

Objeto especial de esta seccion.

2. Estos cálculos presentan generalmente grandes dificultades siempre que las velocidades y las fuerzas varien, en intensidad y en direccion, segun leyes cualesquiera en las diversas posiciones de las piezas ó máquinas simples que hay que considerar; y esto es lo que sucede principalmente (22, 26 y 36) para las piezas dotadas de un movimiento de oscilacion mas ó menos complicado y escéntrico; pero hemos visto (34 y sig.tes 44) que en la mayor parte de los casos que se presentan en las máquinas, está todo dispuesto de manera que las velocidades virtuales ó geométricas de los diferentes puntos y de las fuerzas, tanto activas como pasivas, permanecen en relaciones sensiblemente

invariables así como las intensidades de estas fuerzas y sus cantidades de trabajo elementales ó totales, lo que permite entonces establecer entre estas fuerzas y estas cantidades de trabajo, relaciones independientes de la posicion del sistema y que suministran inmediatamente los medios de calcular los valores de las que son desconocidas en funcion de las demás.

Ahora bien, las máquinas ó elementos de máquinas organizadas de este modo, son las que nos proponemos examinar en la presente seccion dejando para las siguientes todo lo concerniente al caso en que las velocidades virtuales y efectivas, la direccion é intensidad de las fuerzas, sean susceptibles de variar segun leyes mas ó menos complicadas.

Naturaleza de las máquinas simples que consideraremos en esta seccion é hipótesis segun las que se las somete al cálculo.

3 Las poleas, los diferentes tornos, el plano inclinado, las roscas &c, que constituyen las que se llaman propiamente máquinas simples, pertenecen evidentemente á la clase de los órganos de que tenemos que ocuparnos aquí, y que se podrian definir simplemente diciendo: que el movimiento uniforme es rigorosamente posible en ellos bajo la accion de las fuerzas consideradas. Suponiendo

un movimiento de esta naturaleza y aun un movimiento absoluto ó estático, es como se consideran generalmente sus teorías en los tratados de mecánica, haciendo totalmente abstraccion de las fuerzas de inercia que pueden aplicarse á sus diferentes elementos materiales; y en esta misma hipótesis tambien nos proponemos someterlas al cálculo; pero no deberá olvidarse por esto en las aplicaciones, que las fuerzas de inercia, y principalmente las fuerzas centrífugas, pueden tener importancia en ciertos casos (14) haciendo variar las presiones y las tensiones de donde nacen, en general, las resistencias pasivas de las máquinas.

Por lo demás, haremos observar desde ahora, con objeto de facilitar las aplicaciones, que estos efectos son absolutamente despreciables en los casos siguientes: 1.º Cuando el movimiento se verifica con lentitud, como sucede, por ejemplo, en las máquinas que se emplean para elevar ó arrastrar grandes cargas. 2.º Cuando el movimiento, aunque muy rápido, no experimente sino variaciones insensibles, y las masas de las partes materiales están distribuidas uniformemente alrededor de los ejes de rotacion, lo que se presenta en un gran número de máquinas de la industria (29, 34 y 44). 3.º En fin, cuando las potencias y resistencias activas aplicadas á cada pieza simple de la máquina, obran de un modo sensiblemente cons-

tante, ó tal, que se puede sin inconveniente reemplazar en el cálculo, sus acciones variables por las de las fuerzas (9) que tuviesen por intensidad constante, lo que hemos llamado su valor medio.

Idea general del modo de proceder al cálculo de las resistencias pasivas y de sus cantidades de trabajo.

4) Ahora, para dar á conocer cómo pueda efectuarse en general el cálculo de las resistencias pasivas ó perjudiciales en las piezas sometidas así á acciones constantes y á un movimiento uniforme, se observará que toda la dificultad está reducida á determinar para una posicion designada del sistema, los esfuerzos de presion ó de tension, que producen directamente estas resistencias y por cuyo medio se llegan á valuarlos directamente segun los datos de la esperiencia (17 y 18). El método general, consiste como sabemos en suponer el sistema enteramente libre, é introducir los esfuerzos de que se trata así como las resistencias que de ellos resultan, como indeterminadas entre las demás fuerzas del sistema; pero este método general conduce muchas veces á complicaciones de cálculo muy grandes y se puede entonces reemplazar ventajosamente por otros mas directos en cada caso particular, como se puede ver en la teoria de las máquinas simples de Coulomb.

Queriendo, por ejemplo, limitarse á una pri-

mera aproximacion, se podrían calcular los esfuerzos de que se trata, en la hipótesis de que no hubiera ninguna resistencia pasiva; esto sería fácil muchas veces por las reglas ordinarias de la composicion y descomposicion de fuerzas, y suponiendo que se haya determinado anteriormente el valor de la potencia P que pone en equilibrio á la resistencia activa Q, únicas fuerzas que, con el peso de las piezas se supone obran sobre la máquina.

Se obtendrá, pues, así, un valor aproximado pero algo pequeño de los esfuerzos ó presiones que dan lugar á las resistencias pasivas; multiplicando respectivamente estas últimas por los caminos elementales que recorren en un tiempo dado, sus puntos de aplicacion en su misma direccion que se supone invariable así como su intensidad; sumando enseguida todos los productos semejantes, se tendrá un primer valor aproximado de la cantidad de trabajo absorvida por las resistencias pasivas en el intérvalo de que se trata; añadiendo, en fin, esta suma á la cantidad de trabajo que desarrolla en el mismo intérvalo la resistencia activa Q que se supone conocida, se tendrá (15) la que debe desarrollar P. En cuanto al valor mismo de P, que se supone constante en magnitud y direccion, se le obtendrá, yá dividiendo el resultado hallado por el camino que recorre su punto de aplicacion en el intérvalo

de tiempo que se considera y en la direccion de P, ya, lo que es mas general, buscando directamente la fuerza que hace equilibrio á la vez á Q y á las diversas resistencias pasivas ya calculadas.

Si esta primera aproximacion manifestase que las resistencias pasivas ejercen una influencia bastante grande, seria conveniente volver á empezar los cálculos, sustituyendo el nuevo valor de P en vez del antiguo; pero como las resistencias pasivas son en general muy pequeñas, se obtendrá muchas veces desde la primera operacion una aproximacion suficiente para las necesidades de la práctica.

Reflexiones concernientes al caso en que la accion de las fuerzas fuese variable con la posicion del sistema.

5. Segun esto, se vé que si la potencia y las diversas resistencias en lugar de ser constantes en direccion é intensidad como se acaba de suponer fueran susceptibles de variar sensiblemente segun las posiciones sucesivas del sistema, habria precision de calcular su valor y el de su cantidad de trabajo elemental para cada una de estas posiciones, á fin de deducir en seguida las cantidades de trabajo totales que desarrollan entre dos instantes dados, lo que reclamaria el auxilio del cálculo integral ó de los métodos de aproximacion de que he-

mos hablado, (9) métodos que tienen la ventaja particular de no exigir el conocimiento de la ley ó expresion analítica de cada fuerza en funcion del camino descrito por su punto de aplicacion. Pero se evitan en muchos casos estas dificultades reemplazando las resistencias variables por sus valores medios (9) calculados una vez para todas, así como veremos al tratar de los rozamientos en los engranages.

Creemos que en virtud de estos desarrollos no habrá ninguna dificultad en comprender el objeto de las aplicaciones que siguen y que se estará en estado de aprovechar sus resultados cuando se traten de calcular en cada caso particular las cantidades de trabajo útil trasmitidas al operador de una máquina por una fuerza motriz dada; ó la que sea necesario desarrollar en el receptor para producir un efecto útil determinado. Además haremos observar que las únicas resistencias pasivas de que tenemos que ocuparnos aquí son los rozamientos de diversas clases, la adherencia y la rigidez de las cuerdas, atendiendo á que las resistencias de los medios pueden despreciarse, cuando el flúido es el aire y las superficies y las velocidades no son muy considerables, que es lo que sucede en casi todas las aplicaciones.

De la resistencia directa del rozamiento y de la adherencia de los cuerpos en contacto.

Resultados de las esperiencias hechas por los antigüos fisicos.

6. Cuando se hacen deslizar dos cuerpos uno sobre otro tangencialmente á su superficie; es decir, sin que rueden, se desarrolla en sus diferentes puntos de contacto una resistencia dirigida en sentido del camino que describen estos puntos y cuya intensidad depende á la vez de la presion natural que esperimentan, de la naturaleza y del estado de las superficies.

Los físicos han reconocido desde hace mucho tiempo la influencia de esta resistencia y se han ocupado de la determinacion de sus leyes y de su intensidad. Amontons (*) parece que es el primero que ha tratado de valuar el rozamiento y la rigidez de las cuerdas en las máquinas. "Creyó "hallar por sus esperiencias, dice Coulomb, que la "estension no entraba para nada en los rozamien-"tos, cuya medida dependia únicamente de la pre-"sion de las partes que estaban en contacto." Ha deducido de aquí que el rozamiento era en todos los casos proporcional á la presion, en la relacion

(*) Memoria de la Academia de ciencias de 1699.

de uno á tres. Despues de él Muschembrock (*) dedujo de sus propias esperiencias que el rozamiento no es exactamente proporcional á la presion, que depende de la estension de las superficies en contacto y de la velocidad del movimiento.

Resultado de las esperiencias hechas por Coulomb.

7. Pero las investigaciones mas estensas que se han hecho hasta estos últimos tiempos, se deben á Coulomb (**). Este ilustre físico distingue la resistencia que esperimentan dos cuerpos para resvalar uno sobre otro cuando han estado algun tiempo en contacto, de la que tiene lugar mientras están en movimiento.

Reconoció que la primera es muchas veces mas considerable que la segunda, que en uno y otro caso es proporcional á la presion; pero creyó tambien que dependia de la estension de las superficies en contacto segun observó. De aqui resultaria, segun él, que su valor se compondria de una cantidad proporcional á la presion en una relacion constante para los mismos cuerpos en un estado dado, y de otra proporcional á la estension de las superficies en contacto, y que provendria de la adherencia que contraen los cuerpos por la aproximacion de sus superficies.

(*) Curso de física experimental por P. Muschembrock, tomo 1.º, pag.ª 202 y siguientes.

(**) Memorias de matemáticas y de física presentadas á la Academia de ciencias por diversos sabios; tomo X, pag 163 y sig.s

En fin, Coulomb, observando por medio de un relox de semi-segundos la duracion del tiempo que empleaban los cuerpos sometidos á la esperiencia en recorrer las dos mitades de una escursion de cuatro pies, creyó reconocer que el movimiento producido por un esfuerzo constante era uniformemente acelerado, y dedujo de ahí que el rozamiento era independiente de la velocidad. Pero no permitiendo la poca precision de sus medios de observacion establecer esta ley de una manera positiva, indicó restricciones para muchos casos y principalmente para el de los metales que resvalan unos sobre otros ó sobre la madera con barniz ó sin él.

Un físico ingles Mr. G. Rennie ha publicado en 1829 (*) esperiencias mas especialmente relativas al caso en que las superficies empiezan á desgastarse, á rayarse mutuamente, lo que proviene generalmente de la falta de barniz ó del esceso de la presion. Desgraciadamente sus aparatos no eran bastante perfectos para conducirle á resultados exactos y á leyes positivas.

Resultado de las esperiencias hechas en 1831, 1832 y 1834 por Mr. Morin.

8. En estos últimos años el capitan de Artilleria Morin ha tratado de repetir las esperiencias de Coulomb y de estenderlas á la mayor parte de los cuerpos engrasa-

(*) Transacciones filosóficas de la Sociedad Real de Londres; año de 1829.

dos que se usan en las construcciones y en las máquinas, por medio de aparatos susceptibles de dar en cada instante del movimiento, el esfuerzo ejercido para producirle y la ley geométrica á que está sometido.

Estos instrumentos están descritos detalladamente en cuatro memorias que este oficial ha presentado á la Academia de ciencias y de las que se han insertado las tres primeras por órden de esta ilustre Sociedad en los tomos cuarto y sesto del memorial de sabios estranjeros. Nos referimos á estas memorias para todo lo concerniente al método de aproximacion y de calculo empleado para estas esperiencias y nos limitaremos á esponer las leyes y principales hechos que de ellos se derivan.

Resulta de las esperiencias hechas sobre el rozamiento de las maderas, de los metales y de las piedras, con engrasado ó sin él, para las superficies planas, así como para los gorrones, que el rozamiento es:

1.º Proporcional á la presion en una relacion constante que no depende sino de la naturaleza de los cuerpos en contacto y de la del engrasado.

2.º Independiente de la estension de las superficies en contacto.

3.º Independiente de la velocidad del movimiento.

Es cierto, así como lo habia observado Coulomb, que para muchos cuerpos y principalmente para la madera, el rozamiento es mayor cuando las superficies han estado algun tiempo en contacto que cuando ya estan en movimiento; pero resulta de un gran número de observaciones, que una ligera conmocion comunicada á la superficie de contacto de uno de los dos cuerpos, puede hacer desaparecer esta diferencia y ocasionar su separacion con solo un esfuerzo de traccion susceptible de mantener el movimiento, una vez producido. Esta observacion importante deberá aplicarse á las construcciones en que el rozamiento contribuye con su resistencia á mantener la estabilidad de las diferentes partes, y en que se puedan tener ligeros movimientos: resulta de aqui, que se deberá calcular el rozamiento en este caso como si el movimiento estuviese ya adquirido sin tener en cuenta la duracion del contacto.

Los resultados de todas las esperiencias de Mr Morin estan resumidos y clasificados en las tres tablas siguientes relativas la primera al rozamiento de las superficies planas en el instante de partida y cuando han estado algun tiempo en contacto; la segunda, al rozamiento de las superficies planas, en movimiento las unas sobre las otras, y la tercera al rozamiento de los gorrones en movimiento sobre sus coginetes.

9. Rozamiento de las sperficies planas en el instante de partida y cuando han estado algun tiempo en contacto.

Indicacion de las superficies en contacto.	Disposicion de las fibras.	Estado de las superficies	Relacion del rozam.to á la presion	Observac.s
Encina sobre encina	paralelas	sin engrasado	0,62	
	id	frotad. con jabon seco	0,44	
	perpendicular.	sin engrasado	0,54	
	id	mojadas con agua	0,71	
	madera de canto sre mad.a de cara	sin engrasado	0,43	
Encina sobre olmo....	paralelas...	sin engrasado	0,38	
Olmo sobre encina....	Paralelas......	frotada con jabon seco.....	0,41	
	id..........	sin engrasado	0.69	
	Perpendiculares	sin engrasado	0,57	
Fresno, pino, aya, serval sobre encina..........	paralelas...	sin engrasado	0,53	
Cuero curtido sobre encina	el cuero de cara	sin engrasado	0,61	
	el cuero de canto	sin engrasado	0,43	
Correa ó cuero adobado negro... Sobre tambor de encina.....	paralelas...	mojadas en agua	0,79	
Sobre superficie plana de encina	perpendiculares	sin engrasado	0,74	
Trenza de cáñamo sobre encina..............	paralelas...	id.......	0,47	
id id ... id.....	id.........	sin engrasado..	0,50	
Cuerda de cáñamo sobre encina............	paralelas....	mojad. con agua	0,87	
Hierro sobre encina....	paralelas.....	sin engrasado	0,80	
	id..........	sin engrasado	0,62	
Hierro fundido sobre encina..............	paralelas....	mojad. con agua	0,65	
Laton sobre encina.......	paralelas......	mojad. con agua	0,65	
Cuero de buey para guarniciones de embolos sobre hierro fundido..	de cara ó....	sin engrasado..	0,62	
	de canto.....	mojad. con agua..	0,62	

Indicacion delas superficies en contacto.	Disposicion de las fibras.	Estado de las superficies	Relacion del rozamiento á la presion	Observac.s
Cuero negro adobado, ó correa sobre polea de hierro fundido ...	de cara ...	con aceite sebo ó manteca ...	0,12 / 0,28	
		mojad. con agua	0,38	
Hierro fundido sõe id. ...	"	sin engrasado	0,16	Conservando las superficies alg.a suavidad
Hierro forjado sõe id fundido ...	"	id.	0,19	Cuando el contacto no ha durado bastante tiempo p.a esprimir el engrasado
Encina, olmo, hierro forjado id. fundido y bronce, resvalando dos á dos, uno sobre otro ...	"	untadas de sebo	0,10	
	"	aceite ó manteca	0,15	
Piedra caliza oolitica sobre caliza oolitica ...	"	sin engrasado	0,74	Cuando el contacto ha durado bastante tpo p.a esprimir el engrasado y reducir las superficies al estado untuoso.
Piedra caliza dura llamada Muschelkalk sobre caliza oolitica ...	"	sin engrasado	0,75	
Ladrillo sobre caliza oolitica ...	"	id	0,67	
Encina sobre id ...	mad.a de canto	id	0,63	
Piedra caliza dura ó Muschelkalk sobre Muschelkalk ...	"	id	0,70	
Piedra caliza oolitica sobre Muschelkalk ...	"	id	0,75	
Ladrillo sobre Muschelkalk ...	"	id.	0,67	

Indicacion de las superficies en contacto	Disposicion de las fibras	Estado de las superficies	Relacion del rozamiento á la presion	Observac.
Hierro sre caliza oolitica...	"	id	0,49	
Hierro sobre Muschel-Kalk........	"	sin engrasado	0,42	
Encina sobre id........	"	id	0,64	
Piedra caliza oolitica sobre caliza oolitica....	"	Con enlucido de mortero de 3 partes de arena fina y una de cales hidrauli.s	0,74	despues de un contacto de 10' á 15'

Rozamiento de las superficies planas en movimiento, las unas sobre las otras.

Encina sobre encina....	paralelas.....	sin engrasado.	0,48	
	id............	frotadas con jabon seco......	0,16	
	perpendiculares	sin engrasado	0,34	
	id..............	mojad.s con agua	0,25	
	mad.a de canto sobre mad.a de cara	sin engrasado	0,19	
Olmo sobre encina...	paralelas....	id	0,43	
	perpendicular.	id	0,45	
Fresno, pino, aya, peral silvestre y serval sobre encina...........	paralelas...	id	0,36 á 0,40	
Hierro sobre encina.....	paralelas..	sin engrasado	0,62	
		mojad.s con agua	0,26	
		frot. con jabon seco	0,21	
Hierro fundido sobre encina.........	paralelas..	sin engrasado	0,49	
		moj.s con agua	0,22	
		frot.s con jabon seco........	0,19	
Laton sobre encina..	paralelas....	sin engrasado	0,62	
Hierro sobre olmo	id	id	0,25	

Indicacion de las superficies en contacto	Disposicion de las fibras	Estado de las superficies	Relacion del rozamiento á la presion	Observaciones
Hierro fundido sobre olmo	paralelas	sin engrasar	0,20	
Cuero negro adobado sobre encina	id	id	0,27	
Cuero curtido sobre encina	de cara ó ...	sin engrasado	0,30 á 0,35	
		moj.s con agua	0,29	
	de canto ...	sin engrasado	0,56	
		moj.s con agua	0,36	
Cuero curtido sobre hierro fundido y sobre bronce	de cara ó	untuosas y mojadas con agua	0,23	
	de canto ...	untadas con aceite	0,15	
Cáñamo en manojo ó cuerda sobre encina	paralelas	sin engrasado	0,52	
	perpendicul.s	mojad. con agua	0,53	
Encina y olmo sobre hierro fundido	paralelas	sin engrasado	0,38	
Peral silvestre sobre hierro fundido	id	id	0,44	
Hierro sobre hierro	id	id	"	Las superf. se rayan cuando no tienen engrasado.
Hierro sobre fundicion y sobre bronce	"	id	0,18	
Hierro fundido sobre id y sobre bronce	"	id	0,15	Las superficies conservandose un poco untuosas.
Bronce sobre bronce	"	id	1,20	
Bronce sobre hierro fund.o	"	"	0,22	
Bronce sobre hierro	"	"	0,16	
Encina, olmo, peral silvestre, fundicion, hierro, acero y bronce, resbalando uno sobre otro ó sobre sí mismo	"	engrasados del modo ordinario con sebo, manteca, aceite [illegible]	0,07 á 0,08	Estando las superf. un poco untadas cuando [illegible]
		escasam.te untadas [illegible]	0,15	

Indicacion de las superf.^s en contacto	Disposicion de las fibras	Estado de las superficies	Relacion del rozamiento á la presion	Observac.^s
Piedra caliza oolitica sobre caliza oolitica	.... "	sin engrasado	0,64	
Piedra caliza llamada Muschelkalk, sobre caliza oolitica	"	id	0,67	
Ladrillo ordinario sobre caliza oolitica	"	id	0,65	
Encina sobre id	madera de canto	id	0,38	
	paralelas	id	0,69	
Piedra caliza Muschelkalk sobre Muschelkalk	"	id	0,38	
Piedra caliza oolitica sobre Muschelkalk	"	id	0,65	
Ladrillo ordinario sobre piedra	"	id	0,60	
Encina sobre la piedra anterior	mad.^a de canto	id	0,38	
	paralelas ...	id	0,24	
Hierro sobre dicha piedra	id ...	moj.^e con agua	0,30	

Rozamiento de los muñones y gorrones en movimiento sobre sus cojinetes.

Indicacion de las superficies en contacto	Estado de las superficies	Relacion del rozam.to á la presion cuando se renueva el engrase: de la manera ordinaria	Relacion del rozam.to á la presion cuando se renueva el engrase: continuamente	Observaciones
Muñones de hierro fundido sobre cojinetes de lo mismo	Untada de aceite de olivo, mant.a de puerco, de sebo, unto de ruedas blando	0,07 á 0,08	0,054	
	Con los mismos untos y mojadas con agua	0,08		
	Untadas de asfalto	0,054		
	Untuosas	0,14		
	Untuosas y mojadas con agua	0,14		
Muñones de hierro fundido sobre cojinetes de bronce	Untadas de aceite de olivo, manteca de puerco, de sebo, unto de ruedas	0,07 á 0,08	0,054	
	Untuosas	0,16		Comenzaron las superf.s á desgastarse
	Untuosas y mojadas con agua	0,16		
	Muy poco untuosas	0,19		
Muñones de hierro fundido sobre cojinetes de madera de guayaco	Sin engrasar	0,18		
	Mojadas con aceite ó manteca de puerco sin sal	"	0,09	Las mad.s algo untuosas
Muñones de hierro sobre cojinetes de madera de guayaco	Engrasadas de aceite ó de manteca	0,11	"	
	Untuosas	0,19	"	
Muñones de bronce sobre cojinetes de bronce	Engrasados con aceite	0,10	"	
	Id. con manteca	0,09	"	

Indicacion de las superficies en contacto	Estado de las superficies	Relacion del rozam.to á la presion cuando está renovado el engrasado		Observacs.
		Como ordinar.	Continuam.te	
Muñones de bronce sobre cojinetes de hierro fundido	Engrasadas con aceite ó sebo	"	0,045 á 0,050	
Muñones de guayaco sobre cojinetes de hierro fundido	Engrasadas con manteca	0,12	"	
	Untuosas	0,15	"	
Muñones de guayaco sobre cojinetes de id	Engrasados con manteca	"	0.07	

Resultado que se deduce de las tablas anteriores

12. Resulta de la comparacion de estas diversas tablas una consecuencia facil de fijar en la memoria y relativa á casi todas las aplicaciones generales de las máquinas industriales: esta consecuencia es, que para las superficies planas y muñones de madera, de hierro forjado, fundido, ó de bronce, engrasadas con aceite, sebo ó manteca de puerco, la relacion del rozamiento á la presion, es sensiblemente la misma é igual á

0,07, ó 0,08 ;

y que cuando las superficies son simplemente untuosas, tiene por valor medio 0,15.

En fin, estas tablas ponen en evidencia la utilidad de los aparatos destinados á renovar y extender sin cesar el engrasado sobre las superficies rozantes, porque, con su auxilio, la relacion del rozamiento con las

mismos antes que anteriormente, desciende hasta

0,05

Por medio de estos resultados nos será facil en cada caso determinar la intensidad de los rozamientos cuando conozcamos la presion que sufren las superficies en contacto.

En cuanto al rozamiento que proviene de la rodadura de los cuerpos, y que se llama rozamiento de segunda especie, se sabe que es generalmente despreciable respecto del primero, y que se prescinde enteramente de él en todos los cálculos relativos á los cuerpos sólidos y duros que entran en la composicion de las máquinas: pero como puede ser de bastante importancia en algunos casos, no será inutil exponer aqui los pocos datos de las experiencias que le conciernen.

Resistencia debida á la rodadura de los cuerpos unos sobre otros.

13. Sea C (figª 31) un rodillo cilíndrico, colocado sobre un plano de nivel AB y sometido á una presion vertical P, proveniente tanto del peso del rodillo como de una fuerza estraña cualquiera: en virtud de esta presion, de la contextura y de la compresibilidad mayor ó menor de las sustancias en contacto, el rodillo y el plano se comprimirán; se introducirán uno en otro; y si se supone una potencia horizontal F aplicada tangencialmente á la parte superior T de la circunferencia del rodillo, tendrá que vencer la

resistencia opuesta por las asperezas ó partes salien es cualesquiera situadas en a b del lado en que se verifica el movimiento de rodadura sobre el plano AB.

Se poseen muy pocas experiencias sobre la resistencia de los cuerpos á la rodadura y se deben especialmente á Coulomb que las ha hecho incidentalmente con motivo de sus notables investigaciones sobre la rigidez de las cuerdas, cuyos resultados expondremos despues. Habiendo hecho mover sobre una superficie plana de encina rodillos de madera de guayaco de 2 y 6 pulgadas de diámetro, bajo presiones de 100 á 1000 libras, ha tenido motivo de admitir que el valor de la potencia F era sensiblemente proporcional á la presion P é inversa del diámetro de los rodillos, de suerte que se tiene

$$F = A\frac{P}{D}$$

siendo D este diametro y A un coeficiente constante que no varia sino con la naturaleza de las superficies en contacto.

En cuanto al valor de esta constante, Coulomb le ha hallado igual á

0,036 para el rodillo de madera de guayaco,

0,06 para el de olmo,

espresando las presiones P en libras y el diámetro D en pulgadas. Si se miden consiguiente P en kilog.s y el diámetro D en metros, se tendrá para el rodillo de guayaco $F = 0,00097\frac{P}{r}$ kil.s y p.a el de madera de

olmo $F = 0,00162 \frac{P}{D}$ Kilog.s

Estas fórmulas dan para F valores algo excesivos cuando el diámetro del rodillo es muy pequeño. Suponiendo, por ejemplo, $D = 0^m,02$ en la última, dará $F = 0,081 P$; pero como segun la segunda tabla, el rozamiento directo dela madera de olmo resbalando en seco sobre la de encina, seria $0,44 P$, es decir, solamente cinco veces la resistencia que proviene de la simple rodadura, se vé que en ciertos casos seria necesario tener en cuenta el rozamiento de rodadura.

Modo de entender y medir la resistencia absoluta del rozamiento de rodadura.

14. Se observará que las fórmulas anteriores no dan por sí mismas el valor absoluto de este rozamiento, sino únicamente el valor relativo al brazo de palanca de la potencia F respecto al punto de contacto a del rodillo y del plano AB, brazo de palanca que puede ser cualquiera, si se supone que esta potencia obra tangencialmente en la circunferencia de un cilindro concéntrico ó conexico al propuesto, y que tenga un diámetro cualquiera. La resistencia obra realmente en el punto a en sentido contrario del camino recorrido por este punto á lo largo de AB; de suerte que como su velocidad virtual no es mas que la mitad de la de F, su intensidad debe tambien considerarse doble dela que dan las fórmulas

de que se trata.

Para aclarar completamente estas consecuencias, basta observar que la potencia F (fig.ª 32) aplicada tangencialmente á la circunferencia del rodillo, describe un camino, que se compone á la vez del $TT' = aa'$ que ha sido recorrido por los puntos de contacto T y a, y del arco $TT_1 = aa_1$ que se ha desarrollado en cierto modo en estos puntos, arco igual al camino de que se trata: esto parecerá evidente por otra parte, si se supone que F obra por intermedio de un hilo delgado, arrollado sobre el cilindro de F á T'. Ahora bien, resulta que si se llama f el valor absoluto del esfuerzo tangencial, cualquiera que sea, que se ejerce en a para oponerse al movimiento de traslacion del rodillo; de el elemento de camino que describe uniformemente su punto de aplicacion en sentido de AB, estando medida su cantidad de trabajo instantánea por $f\,de$, la de F lo estará por $F.2de$; de suerte que se tendrá (18)

$$f\,de = 2F\,de \quad \text{ó} \quad f = 2F = 2A\frac{P}{D}$$

Tal es, pues, el valor absoluto que se debe atribuir á la resistencia, hecha abstraccion del punto á que está aplicada la potencia F que debe concretarse en la hipótesis del movimiento uniforme. Si F, por ejemplo, obra tangencialmente en el punto T se tendrá

$$F = \frac{1}{2} f \;:$$

si obra tangencialmente en una circunferencia

concéntrica á la del rodillo y de diámetro d, se tendrá, observando que su camino elemental es el de f en la relacion de $d+D$ á D

$$F = f\frac{D}{D+d} = \frac{2AP}{D+d}$$

valor que resulta, cuando $d=0$, ó cuando la potencia obra directamente en C,

$$F = \frac{2AP}{D} = f$$

lo que es evidente á priori.

En fin, si F en lugar de obrar tangencialmente en un círculo concéntrico al rodillo, en puntos variables de la circunferencia de este círculo, estubiese constantemente aplicada á un mismo punto y en una direccion arbitraria, su expresion sería muy diferente de la que acabamos de asignarle, y únicamente relativa á la relacion de su velocidad virtual á la de f, ó del punto a.

En cuanto al caso en que el rodillo tuviese una forma cilíndrica distinta de la forma circular es evidente que la resistencia absoluta á la rodadura, estaría aun espresada por la fórmula

$$f = 2A\frac{P}{D}$$

siempre que se tomase para P la presion normal resultante de todas las fuerzas aplicadas á este cilindro en la posicion que tenga en cierto instante, y que se tomase D igual al diámetro del círculo osculador relativo al punto de contacto correspondiente á esta misma posicion. Se hallaría evidentemente del mismo modo la expresion del rozamiento de se-

dadura en el caso de las superficies convexas de forma continua cualquiera, pero no llevaremos estas consideraciones, teóricas puramente, mas adelante, porque no tendrian utilidad real en el estado actual de nuestros conocimientos experimentales.

Uso de la rodadura para facilitar el trasporte de cargas.

15. Mr. Regnier, antiguo conservador del depósito central de artilleria, ha hecho ver con su dinamómetro una experiencia (*) sobre el empleo de los rodillos circulares para conducir cargas sobre un pavimento horizontal.

Habiendo, en primer lugar, hecho deslizar directamente sobre este pavimento una caja de madera cargada de un peso de 240 Kilog.s (vease esta experiencia en la tabla del nº 7) ha hallado que el esfuerzo que hay que ejercer en el sentido del camino descrito, era de 160 Kilog.s

Habiendo colocado en seguida esta misma caja sobre rodillos de 0,m086 de diámetro, ha hallado que, bajo la misma carga, el esfuerzo que habia que ejercer no era mas que 25 Kilog.s ó próximamente $\frac{1}{6}$ solamente del anterior; pero como habia á la vez rodadura sobre la caja y sobre el pavimento, no se puede deducir nada relativamente al valor que se debe atribuir separadamente á ca

(*) Diario de la escuela politecnica, cuaderno 5º pag. 171.

una de las resistencias que nacen de esta rodadura.

Estas esperiencias sirven, pues, únicamente para probar las ventajas que puede ofrecer el empleo de los rodillos en las construcciones públicas, ventajas que deben reproducirse cuando se sustituyen esferas; por ejemplo, bolas de hierro fundido á los rodillos como se ha hecho para el trasporte á Sn Petersburgo de la enorme roca de granito que sirve de pedestal á la estatua de Pedro el Grande (*). Sabemos que para efectuar este trasporte hubo necesidad de construir bajo los rodillos, caminos con carriles de hierro establecidos sobre macizos de mampostería y revestir de carriles paralelos la parte inferior de los maderos que sostenian la roca; pero como estos medios no hubieran bastado por sí mismos para hacer posible el trasporte por medio del tiro directo de los hombres y de los animales, se hizo uso para aumentar su accion de un cierto número de cabrestantes amarrados á estacas fijas en el suelo de distancia en distancia; cabrestantes de cuya teoría segun Coulomb, nos ocuparemos teniendo encuenta el rozamiento y la rigidez de las cuerdas.

Observaciones sobre el modo de evaluar la resistencia de este trasporte.

16 Cuando se trasporta así una carga sobre rodillos, recorre (14) necesariamente un camino doble del que describen sus centros; y esto es lo que obliga á trasla

(*) Arte de construir por Rondelet trasporte de las cargas.

dar frecuentemente los rodillos de atras adelante del bastidor que sostiene la carga.

Esta operacion ocasiona necesariamente cierta pérdida de trabajo motor y de tiempo, que no tiene lugar en el trasporte por carruages, en que la potencia está inmediatamente aplicada al eje de cada rueda; pero entonces esta pérdida está reemplazada por la proveniente del rozamiento de los ejes y que enseñaremos pronto á calcular.

En cuanto al modo de valuar la resistencia total en el caso que nos ocupa, se deduce inmediatamente de las observaciones que preceden.

Es claro, en efecto, que si un cuerpo P (fig.ª 33) está sostenido sobre uno ó dos rodillos por una cara plana y horizontal DE, la fuerza F que es necesario aplicar en sentido de esta cara para vencer á la vez su resistencia á la rodadura y la del plano horizontal inferior AB, deberá estar expresada por

$$\frac{1}{2}(f+f') = \frac{1}{2}\left(2A\frac{P}{D} + 2A'\frac{P}{D}\right) = \frac{P}{D}\left(A + A'\right) = F$$

siendo f el valor absoluto de la resistencia tangencial que se desarrolla en T y T'.

A' el coeficiente relativo á las sustancias en contacto en estos puntos.

Para convencerse directamente de esto, basta observar que siendo e el elemento del camino descrito en cierto instante por los centros de los rodillos, se deberá necesariamente tener (15) en la hipotesis del movimiento uniforme,

$$2Fe = fe + f'e'.$$

atendiendo á que el arco desarrollado en T es simplemente igual al que lo está en a, mientras que el camino descrito simultáneamente por el punto de aplicacion de F, es doble de este arco.

Suponiendo, por ejemplo, que en la esperiencia citada de Mr. Reguier (15) los rodillos eran de madera de olmo y la caja de encina, se tendria, segun Coulomb (13)

$$A' = 0{,}00162 .$$

Por otra parte $P = 240$ Kil, $D = 0^m{,}036$, $F = 25$ Kil, sustituyendo estos valores en la primera de las ecuaciones anteriores, se deducirá

$$A = 0{,}00738$$

valor cinco veces mayor que el de A'; lo que no tiene nada de admirable, pues que A se refiere á la resistencia de un pavimento que podria contener desigualdades ú obstaculos considerables.

De la rigidez de las cuerdas y de las correas.

Nociones sobre la resistencia de la rigidez de las cuerdas.

17. Cuando una cuerda PMQ (fig.ª 34) está arrollada sobre un rodillo ó una polea móvil alrededor del eje C, y que se halla tensa en uno de sus estremos por el peso Q, que debe poner en equilibrio

á hacer mover una potencia P obrando en el otro se observa que la parte BQ del lado de la resistencia solicitada por la rigidez, se separa de la direccion propia del esfuerzo Q, de suerte que el brazo de palanca de este esfuerzo se ha aumentado. La parte AP de la cuerda que corresponde á la potencia P, parece, al contrario, que conserva una direccion que se confunde con la de esta potencia, atendiendo á que la elasticidad de la cuerda tiende mas bien á faborecer el desarrollo que á impedirlo; y resulta de aquí, que la arrolladura en B produce sola el esceso de resistencia que tiene que vencer la potencia P.

Si no hubiera rigidez, el peso P sería igual á Q, pero á causa de la rigidez P debe aumentarse en una cierta cantidad que Coulomb, segun los resultados de las esperiencias, ha hallado que es sensiblemente independiente de la velocidad del movimiento y que para las cuerdas ordinarias, su valor está representado por la fórmula siguiente:

$$R = \frac{d^{\mu}}{D}(a+bQ) \text{ Kilog.}^s$$

en donde D y d son los diámetros respectivos de la polea y de la cuerda espresados en metros; Q la tension de la parte de esta cuerda que sufre la arrolladura en B tension que se supone dada en Kil.^{s}; a un peso constante que se refiere á la rigidez natural de la cuerda y que proviene del grado mayor ó menor de tension ó de torsion de los hilos sencillos

que la componen (*); b un número igualmente constante y únicamente relativo al aumento de rigidez debida á la tension estraña Q; en fin μ otro número que varia esencialmente con el estado de la cuerda.

Para las cuerdas ordinarias, μ está comprendido entre 1 y 2 segun el grado mayor ó menor de uso ó de flexibilidad natural; $\mu = 2$ para las cuerdas gruesas y nuevas; $\mu = 1{,}5$ para las cuerdas mas que á medio uso: en fin, $\mu = 1$ para los ramales muy delgados.

Para las cuerdas embreadas, es mas exacto reemplazar d^{μ} por el número n de hilos de carrete de que se compone; la fórmula resulta simplemente

$$R = \frac{n}{D}(a + bQ) \text{ Kilóg.}^s$$

y la resistencia no varia sensiblemente con el grado del uso de las cuerdas.

Resultado de las esperiencias de Coulomb.

18. Los resultados de las esperiencias que ha hecho Coulomb para determinar los valores de las cantidades $d^{\mu} a$, ó na; $d^{\mu} b$ ó nb; en que, conforme se ha indicado, la primera espresa la rigidez constante de una cuerda de especie y diámetro dados, y la segunda su-

(*) Las cuerdas se componen de tres ramales ó cuerdas menos gruesas entrelazadas y torcidas: los ramales están formados de cierto número de filamentos ó hebras que se llaman hilos de carrete.

rigidez por kilógramo de la carga ó tension Q, estan consignados en la tabla siguiente que tomamos de Mr Navier Arquitectura hidráulica de Belidor, nueva edicion, pagª 178, nota (66)

Tabla de los pesos necesarios para doblar diferentes cuerdas alrededor de un arbol de 1.m de diametro (*)

Indicacion de las cuerdas	Diametro de las cuerdas	Pesos de las cuerdas por metro de longitud	Rigidez constante = $d^{\mu} a$	Rigidez por kil. de carga = $d^{\mu} b$
Cuerdas blancas de				
30 hilos de carrete....	0,m0200	0,k2834	0,k222460	0,k0097382
Idem de 15 id.....	0,0144	0,1448	0,063514	0,0055182
Idem de 6 id	0,0088	0,0522	0,010604	0,0023804
Cuerdas embreadas de				
30 hilos de carrete.....	0,0236	0,3326	0,349600	0,0125514
Idem de 15 id	0,1632	0,1632	0,105928	0,0060592
Idem de 6 id	0,0096	0,0693	0,212080	0,0025968

Nota: Para las cuerdas blancas mojadas de 0,m02 y aun mas, es preciso tomar para $d^{\mu} a$ el doble de los números puestos en la tabla. El valor de $d^{\mu} a$ aumenta un poco tambien para las cuerdas embreadas cuando la temperatura es inferior á cero; en fin es un poco menor para las cuerdas que se acaban

(*) Las cuerdas que empleó Coulomb eran nuevas y estaban compuestas de tres ramales, cuyos hilos, en virtud de la torsion se habian reducido en la fabricacion al tercio de su longitud primitiva: las esperiencias han dado para estas cuerdas $\mu = 1,15$ término medio, para cuerdas ya apenas en estado de servir, Coulomb ha hallado $\mu = 1,40$. los numeros adoptados anteriormente son un poco mayores, lo que tiende á aumentar la influencia de la rigidez, lo que no tiene ningun inconveniente pª el uso que se trata de hacer de él en la práctica (Vease la teoria de las maquinas simples de Coulomb Memorias de los sabios estrangeros, tomo 10)

de ellas entre una vista a que también que esperi to cierto tiempo tiene que la rigidez llegue a su limi te y que si las cuerdas pasan por poleas consecutivas, su resistencia es inferior a la que se designa en los números de la tabla anterior. Se disminuye ade más mucho la rigidez de las cuerdas impregnán dolas de un cuerpo grasiento ó frotándolas con ja bon.

Modo de aplicar estos resultados al cálculo de la rigidez de las cuerdas.

19. Cuando se trata de valuar la rigidez de una cuerda dada por medio de la tabla, se escoge en ella una cuerda que por su constitución y su espesor, se se pare lo menos posible de aquella y se sustituyen los valores de $d^{\mu}a$, $d^{\mu}b$ que le corresponden en la formu la $\frac{1}{D}(d^{\mu}a + d^{\mu}bQ)$ reemplazando en ella D y Q por los valores que convienen al caso actual, lo que equi vale á calcular la rigidez de la cuerda de la tabla, supuesta arrollada al mismo tambor que la cuerda dada y solicitada por el mismo peso Q.

Esto supuesto, siendo d' el diametro de la cuerda que hay que calcular, $\frac{d'^{\mu}}{D}(a+bQ)$ será su rigidez, puesto que $a.b\,Q.D$ tienen los mismos valo res que anteriormente, luego bastará multiplicar el resultado obtenido para la cuerda de la tabla, por la relacion $\frac{d'^{\mu}}{d^{\mu}} = \left(\frac{d'}{d}\right)^{\mu}$

tomando para μ un número relativo al grado

de uso de la cuerda (*) conforme á lo que se ha prescrito anteriormente.

Para las cuerdas embreadas, bastará multiplicar el mismo valor ó resultado por la relacion $\frac{n'}{n}$ del número de hilos de carrete de las dos cuerdas.

De la fuerza absoluta y del peso de las cuerdas.

20. A fin de no omitir nada esencial, de lo que concierne á las cuerdas, añadiremos, segun Coulomb, que no se debe nunca cargarlas con un peso de mas de 40 Kil.s por hilo de carrete, aunque en general pueden sostener sin romperse de 50 á 60 Kil.s Las cuerdas mojadas pierden cerca de un tercio de su fuerza y la resistencia á igualdad de diametro, no es para las embreadas mas q.e los $\frac{2}{3}$ ó los $\frac{3}{4}$ de las cuerdas blancas.

Segun las esperiencias de Duhamel, la resistencia de las cuerdas blancas á la rotura seria proporcional al cuadrado del diametro; pero aumenta en una relacion un poco mayor que su peso bajo la unidad de longitud, y que el número de hilos de carrete de que se componen: siendo d el diametro de una cuerda espresado en centímetros, se podrá, segun M.r Navier, (vease la obra citada pag.a 182, nota bc) representar la fuerza necesaria pa-

(*) Segun la nota precedente seria preciso para mayor exactitud multiplicar el resultado obtenido por la relacion $\frac{d'^{n}}{d^{1,75}}$: pero como el esponente 1,75 difiere muy poco de los límites 2 y 1,50 adoptados para las cuerdas de cierto espesor, se puede sin inconveniente suponer con M.r Navier el esponente de d' igual á n.

ra romperla por 400 d^2 Kilog.s, ó lo que es lo mismo por 40,5 c^2 Kil.s siendo c la circunferencia espresada igualmente en centímetros; este valor, puede por otra parte diferir mas ó menos de $\frac{1}{5}$ del verdadero, segun la calidad del cáñamo y las circunstancias de la fabricacion.

Estos diferentes resultados no se aplican sino á las cuerdas fabricadas segun el antiguo método; las que lo estan segun los procedimientos de fabricacion introducidos por Mr Hubert en el Arsenal de marina de Rochefort, además de tener mas flexibilidad, ofrecen aun un aumento de resistencia, que aumenta proporcionalmente al número de hilos de carrete.

Algunas veces es útil conocer el peso de las cuerdas, cuyo diámetro está dado; se hallará segun esta regla que nos ha comunicado el célebre Ingeniero de que se acaba de hablar, tomando $\frac{1}{5}$ del cuadrado de la circunferencia de la cuerda espresada en pulgadas, el resultado será en libras el peso de una braza de 5 pies de longitud de esta cuerda; llamando siempre c el número de centímetros contenidos en esta circunferencia, el peso del metro de cuerda estará espresado por la formula,

$$0,00826\ c^2\ \text{Kil.}^s$$

Modo como puede tenerse en cuenta la rigidez de las cintas y de las correas

21. Veremos en la siguiente seccion, que en lugar de las cuerdas, se hace uso muchas veces en las máquinas, de correas ó tiras de cuero de Ungria; anchas y de muy poco espesor que se refuerzan en sus bordes exteriores. Como estas correas tienen generalmente una flexibilidad muy grande, su rigidez dá lugar á una resistencia bastante pequeña y que se podrá en rigor, despreciar en los cálculos. Sin embargo, si se quiere tener en cuenta se podrá, á falta de esperiencias especiales sobre este objeto, suponer que su resistencia es sensiblemente la misma que la de una reunion de pequeñas cuerdas superpuestas y que tengan un diámetro igual al espesor en sus diversos puntos; es decir, que se usará aun para calcular ó valuar esta resistencia de la fórmula del núm.º 17 que será preciso multiplicar en seguida por un coeficiente numérico, que represente el número de cuerdas que se supone entran en la composicion de la correa; se adoptarán además para el esponente u que entra en esta fórmula, valores que esten en relacion con el grado mayor ó menor de flexibilidad que se supone á la correa, segun la duracion de su empleo y la naturaleza del cuero que la compone.

Experiencias hechas en Anzin y repetidas despues en Metz, prueban que cuando las correas convenientemente tensas, sirven para comunicar el movimiento á diferentes tambores, la velocidad se transmite de un eje á otro, sin pérdida apreciable, así sucede tambien probablemente con las cuerdas sin fin que se usan para el mismo objeto: esta circunstancia consiste en el rozamiento que se ejerce en los diferentes puntos de contacto con los tambores y cuya intensidad, creciendo muy rápidamente con la tension y el arco abrazado, impide á la correa resbalar bajo la diferencia de esfuerzos que le solicitan en sus extremos; como esta propiedad es una cualidad preciosa para muchos casos, vamos á indicar el modo de calcular este rozamiento.

Rozamiento de cuerdas y correas alrededor de cilindros inmóviles.

Relacion general entre la potencia y la resistencia.

21. Sea P (figª 35) una potencia que solicita á la resistencia Q por intermedio de la cuerda ó correa M A N arrollada sobre un cilindro inmóvil cuyo centro es C; es evidente que en el instante en que P principiara á vencer á Q, haciendo deslizar la cuerda sobre el cilindro, su intensidad de

be ser igual á la de Q aumentada del rozamiento desarrollado á lo largo del arco M A N por las presiones normales que resultan de las tensiones que tienen lugar en los diferentes puntos de la cuerda.

Llamando r el rádio del cilindro t á la tension del elemento cualquiera $ab = ds$ de la cuerda, $t' = t + dt$ la tension del elemento siguiente bc del lado de P; α el ángulo en b formado exteriormente al cilindro por estos elementos ó tensiones; f el coeficiente del rozamiento, relativo á las sustancias en contacto: el incremento de tension dt será evidentemente igual al rozamiento que se ejerce sobre el elemento ab en virtud de la presion normal que sufre, presion que no es mas que la componente $t' \operatorname{sen} \alpha$ de t' perpendicular á la direccion de este mismo elemento y que se puede considerar como igual simplemente á

$$t\alpha$$

despreciando los infinitamente pequeños de órdenes superiores al primero.

Pero como el angulo α formado por los elementos consecutivos ab y bc de la curva, es igual al de las normales ó radios correspondientes del cilindro, que abrazan entre sí un arco medido por ds, se tiene $ds = \alpha r$ y

$$dt = ft\alpha = \frac{ft\,ds}{r} \quad ó \quad \frac{dt}{t} = \frac{f\,ds}{r}$$

Integrando esta última ecuacion desde el punto

N para el que se tiene $s=0$ y $t=Q$, hasta el punto M, en que $s=$ arco $MAN=s$, y $t=P$, resultará

$$\log. P - \log. Q = \log. \frac{P}{Q} = f\frac{s}{r},$$

que se puede poner bajo esta forma, llamando $e = 2,71828$ la base de los logaritmos Nepenianos é hiperbólicos

$$P = Qe^{\frac{fs}{r}} \quad l.P = l.Q + 0,4342945\frac{fs}{r}$$ (*) designando por l la inicial de los logaritmos de las tablas ordinarias.

Si en lugar de arrastrar P á Q se hallase el punto de ser arrastrado se tendria evidentemente

$$P = Qe^{-\frac{fs}{r}} = \frac{Q}{e^{\frac{fs}{r}}}\,; \quad l.P = l.Q - 0,4342945\frac{fs}{r}$$

Los valores de f se hallarán además por las tablas de los números 7 y siguientes, observando respecto á las cuerdas de cáñamo, que se puede, esperando siempre experiencias mas estensas respecto de esto, suponer f solamente igual á 0,33 cuando las cuerdas estan

(*) Llamando θ el arco que sobre la circunferencia cuyo radio es la unidad mide el ángulo abrazado por las normales estremas del arco s tendremos

$$s = \theta r, \quad P = Qe^{f\theta}$$

relacion que resulta aplicable á un cilindro ó á una curva NAM cualquiera, siendo siempre θ el arco que mide el ángulo comprendido entre las normales de los puntos estremos N y M de la cuerda.

Para convencerse de esto basta observar que se tiene en las mismas hipótesis las relaciones $\alpha = d\theta$ $\frac{dt}{t} = f\,d\theta$ en que la última se integra inmediatamente cualquiera que sea el modo con que varíe θ y el radio de curvatura en cada punto. Se ve, pues, que el rozamiento de las cuerdas sobre los cilindros depende mucho menos de la forma y estension del arco abrazado que de la abertura del ángulo comprendido entre las normales de los estremos de este arco.

cuerdas y los cilindros esten tambien aliviados por el rozamiento.

Uso del rozamiento de las cuerdas en las artes.

22. Se utiliza muchas veces en las artes este rozamiento de las cuerdas con el objeto de disminuir el esfuerzo que hay que ejercer para sostener una carga, ó para poner en equilibrio una resistencia cualquiera muy grande. Por ejemplo, cuando los toneleros quieren bajar una pipa de vino á una cueva á lo largo de una escalera rápida, la colocan sobre un pequeño trineo ó sobre dos piezas de madera formando un plano inclinado, cuya resistencia retarda ya el movimiento hasta cierto punto; pero como esto no bastaria para que uno ó dos hombres, pudiesen sin peligro, sostener la pipa contra la accion de la gravedad, arrollan los dos extremos de la cuerda del tiro alrededor de dos piezas de madera cilíndricas, inclinadas y apoyadas por su parte inferior sobre el suelo de la cueba y la superior contra el muro de la puerta de la cueba; la resistencia producida por la arrolladura disminuye considerablemente el esfuerzo que tendrian que ejercer obrando directamente sobre las cuerdas que sostienen la pipa.

Supongamos que la tension de estas cuerdas, que será facil de calcular por medio de la teoria del plano inclinado que expondremos des-

pues, sea de 500 kilog.s; que el rádio de los cilindros sea de $0,^m08$, que, en fin, la cuerda haga tres revoluciones al rededor de estos cilindros; se tendrá aquí, suponiendo la cuerda usada y los cilindros alisados por el rozamiento

$$Q = 500 \text{ kil}, \; r = 0,^m08 \quad f = 0,33 \quad \frac{fs}{r} = 6,217$$

$$0,43429 \frac{fs}{r} = 2,6999809 \text{ y, en fin}$$

$$l.P = l.Q - 0,43429 \frac{fs}{r} = 0,00101, \text{ y } P = 0,^{kil}9977$$

para el esfuerzo que hay que ejercer sobre cada una de las cuerdas del tiro.

Por medio del rozamiento de las cuerdas sobre los rodillos, es tambien como un solo hombre puede hacer descender un cañon de 24 suspendido á una cábria, sin ejercer un esfuerzo muy grande, y asi es tambien como se modera en la marina, el movimiento de los navios que se trata de lanzar al mar, colocados sobre astilleros ó piezas de madera inclinadas, bajo cierto angulo con el horizonte.

Rozamiento de un cuerpo sobre un plano inclinado.

Caso en que la potencia está inclinada de un modo cualquiera

23. Sea Q (fig.ª 36) el peso de un cuerpo colocado sobre un plano inclinado AB respecto del horizonte segun un ángulo $ABC = \alpha$; se supone á

este cuerpo solicitado de abajo arriba por una potencia P que forma con la direccion del plano AB el angulo β y que está comprendido en un plano vertical perpendicular á la horizontal B del primero. La presion normal resultante de P y Q sobre AB será aquí $Q\cos\alpha - P\operatorname{sen}\beta$ dando lugar al rozamiento

$$f(Q\cos\alpha - P\operatorname{sen}\beta)$$

En cuanto á las componentes de las fuerzas segun el plano, serán $Q\operatorname{sen}\alpha$ y $P\cos\beta$: se tendrá pues, para calcular la fuerza P, que estaria á punto de hacer subir el cuerpo á lo largo de AB

$$P\cos\beta - Q\operatorname{sen}\alpha = f(Q\cos\alpha - P\operatorname{sen}\beta)\text{: de donde}$$
$$P = \frac{\operatorname{sen}\alpha + f\cos\alpha}{\cos\beta + f\operatorname{sen}\beta}\,Q.$$

Cambiando el signo de f en esta espresion, se tendrá evidentemente el esfuerzo necesario unicamente para impedir que el cuerpo descienda en virtud solo de su propio peso; y para que este esfuerzo sea nulo, será preciso evidentemente que se tenga

$$\operatorname{sen}\alpha - f\cos\alpha = 0,\ \text{ó}\ \operatorname{tang} = f.$$

Es decir, que el plano AB deberá formar con el horizonte, un angulo llamado de rozamiento, cuya tangente trigonométrica sea igual al coeficiente f: la observacion directa del angulo bajo el que un cuerpo está á punto de resvalar á lo largo del plano daria, pues, el valor de la relacion del rozamiento á la presion: pero es preciso observar que este valor es, casi siempre superior al que tiene

lugar durante el movimiento mismo del cuerpo (7, 8 y 9). Si fuese además necesario tener en cuenta la adherencia de este cuerpo con el plano (6) no habria que hacer evidentemente mas que añadir á P el cociente del valor de esta adherencia por $\cos\beta + f\,\text{sen}\,\beta$, atribuyéndole el mismo signo que á f segun los casos.

Examen relativo á diversos casos particulares.

24. Cuando P es paralela á AB, $\beta = 0$; cuando obra debajo del plano, β es negativo: en fin, cuando P sea horizontal (fig.ª 37) $\beta = \alpha$, de suerte que se tiene $P = Q\,\frac{\text{sen}\,\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\,\text{sen}\,\alpha} = Q\,\frac{\text{tang}\,\alpha + f}{1 - f\,\text{tang.}\,\alpha}$ valor, que resulta infinito cuando $\text{tang.}\,\alpha$ sea igual á $\frac{1}{f}$; lo que indica que cualquiera que sea la magnitud que se atribuya á P no podrá entonces hacer subir el cuerpo á lo largo del plano AB. La misma circunstancia se reproduce tambien en el caso general para un valor de β tal como, $\text{tang.}\,\beta = -\frac{1}{f}$.

En cuanto á la medida de la presion que sufre el plano inclinado cuando P es horizontal estará dada evidentemente por la fórmula

$$N = Q\cos\alpha + P\,\text{sen}\,\alpha = Q\left(\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha.\frac{\text{sen}\,\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\,\text{sen}\,\alpha}\right) = \frac{Q}{\cos\alpha - f\,\text{sen}\,\alpha}$$

Angulo mas ventajoso de tiro; caso en que es necesario aplicar una fuerza al cuerpo para que descienda.

25. Diferenciando la expresion general de P

respecto á β, é igualando el resultado á cero, se halla que el mínimo esfuerzo necesario para hacer subir Q á lo largo del plano AB, tiene lugar cuando tang. $\beta = f$, obrando esta fuerza encima del plano AB y de abajo arriba, como lo expresa la figura 36; pero no se debe deducir por esto, que el valor del trabajo que desarrollará entonces esta potencia sea tambien un mínimo respecto al del trabajo útil que supone la elevacion del peso Q. En efecto, la relacion de estas cantidades de trabajo es evidentemente (seccion 1.ª nº 8 y siguientes)

$$\frac{P\cos\beta}{Q\,\text{sen}\,\alpha} = \frac{1+f\cot.\alpha}{1+f\,\text{tang.}\,\beta}$$

cantidad que disminuye indefinidamente á medida que aumenta β.

Para completar esta discusion que es enteramente aplicable al rozamiento de las roscas de que trataremos despues, se observará que, cuando el ángulo α de inclinacion del plano es menor que el del rozamiento ó que tang. $\alpha < f$, no solamente no es necesario aplicar al cuerpo una fuerza para impedir que descienda sobre este plano sino que se necesita aplicarle una para obligarle á bajar.

Por ejemplo, en el caso de la fig.ª 37 y suponiendo una fuerza horizontal P' tirando de Q hácia P', enteramente opuesta á P, será preciso para que el cuerpo descienda, que se tenga

$$P' = Q\frac{f\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha + f\,\text{sen}\,\alpha} = Q\frac{f - \text{tang.}\,\alpha}{1+f\,\text{tang.}\,\alpha}$$

valor que se obtiene cambiando á la vez el signo de

f y P ó Q en la ecuacion anterior (24).

Rozamiento de las piezas mantenidas por guias y correderas en una direccion invariable

Caso en que las fuerzas estan comprendidas en un mismo plano que es tambien el de las guias.

34. Sea (figª 38) una pieza cualquiera de una máquina, dirigida en su movimiento por una varilla prismática AB resbalando entre las guias ó abrazaderas a y a' que la obligan á moverse en sentido de su eje. Supongamos primeramente que las fuerzas que solicitan activamente á esta pieza estan comprendidas en un mismo plano que pasa por este eje, y por los puntos de apoyo a y a' que pertenecen á los puntos de contacto de la varilla y de las guias, superficies que suponemos aquí de muy corta extension y perpendiculares al plano de que se trata. Concibamos para mas sencillez, cada una de las fuerzas propuestas, descompuestas en otras dos en su punto de aplicacion, una paralela y otra perpendicular á la direccion del eje AB de la barilla; la reaccion de todas estas fuerzas, producirá presiones normales N y N' en los puntos de apoyo a y a', y que daran lugar á los rozamientos fN y $f'N'$, que se deberan com-

prender en el número de las resistencias que se oponen al movimiento de la varilla.

Para mostrar generalmente como se pueden valuar N y N', consideraremos uno cualquiera m de los puntos de aplicacion de las fuerzas, y llamaremos X e Y las sumas de las componentes perpendiculares y paralelas á AB que solicitan á este punto;

y la distancia de X á a',

x la de Y á AB, es decir, mb,

l la de a á a' medida sobre la direccion del eje AB:

En fin, convendremos en mirar como positiva á toda componente que tienda á hacer caminar la varilla de B hácia A, ó de b hácia m, obligándola así en este último caso, á apoyarse contra las abrazaderas de la izquierda; y por consiguiente miraremos como negativas las que tiendan á hacer mover en sentido contrario esta misma varilla, estando indicado el sentido de las componentes por las flechas de la figura.

La fuerza $+X$, podrá, pues, descomponerse en otras dos paralelas que darán lugar á las presiones

$$+\frac{Xy}{l} \text{ en } a \qquad +\frac{X(l-y)}{l} \text{ en } a'.$$

En cuanto á la fuerza $+Y$, se sabe, segun la teoria de los pares (*) que puede reemplazarse

(*) Elementos de Estatica de Mr Poinsot nº 47, 170 y siguientes.

por una fuerza $+Y$ que obre en sentido del eje AB y por un par perpendicular á AB que dá lugar á las presiones normales

$$-\frac{Yx}{l} \text{ en } a \quad +\frac{Yx}{l} \text{ en } a'.$$

Luego las presiones totales que resultan de la accion de X é Y seran

$$\frac{Xy}{l}-\frac{Yx}{l} \text{ en } a, \quad \frac{X(l-y)}{l}+\frac{Yx}{l} \text{ en } a'.$$

Haciendo lo mismo con las demas componentes paralelas ó perpendiculares á AB, y observando además que las que obran en el mismo eje no dan lugar á pares, la presion total podrá representarse por

$$N=\Sigma\left(X\frac{y}{l}-Y\frac{x}{l}\right) \text{ en } a, \quad N'=\Sigma\left(X\frac{l-y}{l}+Y\frac{x}{l}\right) \text{ en } a'$$

presiones en que cada una tenderá á hacer apoyar la varilla contra la guia de la izquierda ó de la derecha, segun que sea positiva ó negativa.

La resultante ó la suma de las fuerzas que obran segun el mismo eje AB pudiendo además representarse por

$$\Sigma Y,$$

se tendrá para la ecuacion de equilibrio de todas las fuerzas, en la hipótesis de que el movimiento se verifique de B hácia A

$$\Sigma(Y)=f(N+N')=f\Sigma\left(X\frac{y}{l}-Y\frac{x}{l}\right)+f\Sigma\left(X\frac{l-y}{l}+Y\frac{x}{l}\right),$$

que dará la potencia en funcion de las resistencias, y en la que será preciso no tomar sino los valores absolutos de N y N' ó de las cantidades comprendidas entre los paréntesis, pues que el

rozamiento obra en sentido contrario del movimiento, cualquiera que sea la direccion de las presiones que le producen.

Si sucede en particular que estas cantidades sean las dos del mismo signo, se tendrá simplemente, sumándolas

$$\Sigma(Y) = f\,\Sigma(X)\,;$$

pero esta circunstancia no es mas que accidental y convendrá siempre principiar por tratar la cuestion en la hipótesis mas general, asi como la aplicaremos en el numl. 36.

Ejemplo relativo al rozamiento de las varillas de los pilones ó mazas.

35. Supongamos, por ejemplo, que AB (fig.ª 39) sea la varilla vertical de un pilon, cuyo peso, comprendido el de la misma varilla, sea Q, y que esté solicitado verticalmente de abajo arriba por la presion P de un álave tangente en m á la superficie inferior, y horizontal mb de una traviesa ó tobarto. Como esta presion da lugar á un rozamiento que se ejerce segun mb de derecha á izquierda, y que está medido por $f'P$ (si se designa por f' el coeficiente relativo á las sustancias en contacto), se tendrá

$X = f'P$, $Y = P$, $N = f'P\frac{y}{l} - \frac{Px}{l}$, $N' = f'P\frac{(l-y)}{l} + \frac{Px}{l}$; y por consiguiente

$$P - Q = f\left(\frac{Px}{l} - f'P\frac{y}{l}\right) + f\left(\frac{Px}{l} + f'P\frac{l-y}{l}\right) = 2fP\frac{x}{l} - 2ff'P\frac{y}{l} + ff'\frac{Pl}{l}$$

observando que $f'P\frac{y}{l}$ debe generalmente ser menor en este caso á $\frac{Px}{l}$; y por consiguiente N' negativo. De aquí se saca

$$P=\frac{Ql}{l-2fx-ff'(l-2y)}=Q+fQ\,\frac{2x+f'(l-2y)}{l-2fx-ff'(l-2y)}$$

espresion que demuestra que hay ventaja para la potencia P, en disminuir x y aumentar la distancia l que separa los dos puntos de apoyo a y a'.

Si, por el contrario, $f'P\frac{y}{l}$ escediese á $\frac{Px}{l}$, ó si x fuese menor que $f'y$, se tendria simplemente

$$P=\frac{Q}{1-ff'}=Q+fQ\,\frac{f'}{1-ff'}$$

valor muy diferente del anterior.

Observaciones relativas al caso en que las superficies rozantes de las guias tienen cierta estension

36. Cuando las superficies rozantes de las guias tienen gran estension, por ejemplo si las guias distintas a y a' estan reemplazadas por ranuras, ó correderas continuas, los valores de las presiones N y N' parece que son enteramente indeterminados, atendiendo á que se reparten en un número infinito de puntos; pero observando que las superficies anteriores y posteriores de las guias y ranuras son paralelas, y dejan entre ellas y las varillas un juego indispensable, es facil convencerse que esta indeterminacion, no tiene lugar; porque sucederá

uno de estos dos casos; ó la varilla se apoyará en toda su longitud sobre una misma cara de la ranura, ó se apoyará por un extremo sobre una de las caras, y por el otro sobre la cara opuesta; en el primer caso, las presiones N y N' serán del mismo signo, y su suma, que representará la presion total, será independiente de la consideracion de las presiones elementales en cada punto y se reducirá simplemente á la suma

$$\Sigma(X)$$

de las componentes de las fuerzas perpendiculares al eje AB de la varilla; en el segundo, esta varilla se apoyará por sus caras opuestas sobre las aristas que limitan hácia la parte superior é inferior, las caras de las ranuras, de suerte que las presiones N y N' obrarán en puntos determinados como en el caso anterior en que las superficies eran muy pequeñas; pero atendiendo á que se ignora de antemano cual de los dos casos tiene lugar, se deberá primeramente resolver la cuestion en la segunda hipótesis que es la mas general, y asegurarse, segun los resultados del cálculo si los valores que dá para N y N' no tienen el mismo signo, en cuyo caso convendrá tomar simplemente

$$f(N+N') = \Sigma(X)$$

haciendo abstraccion de este signo como se ha

dicho anteriormente (35)

Estas observaciones son principalmente aplicables á los marcos porta-útiles de las máquinas que están guiados en su movimiento por lengüetas en formas de espiga, ó de cuchillo que resbalan en ranuras ó rebajos de un perfil análogo; pero como entonces se tienen dos sistemas distintos de guias que considerar, conviene observar que el método de solucion queda el mismo que si no hubiese mas que uno solo, siempre que las fuerzas obren simétricamente respecto del plano perpendicular al bastidor, y que divide en dos partes iguales el intervalo comprendido entre las guias; y esto es lo que sucede, en efecto, casi siempre, en las máquinas bien establecidas. En el caso contrario, seria preciso descomponer cada fuerza en su propio plano como lo hemos indicado en el número 34; luego, descomponer tambien de nuevo, las presiones perpendiculares que resultan sobre los dos extremos del bastidor en otras que obraran en cada punto real de apoyo, lo que conduciria á dificultades particulares en ciertos casos, que no se podrian salvar sino teniendo en cuenta la fuerza de elasticidad mayor ó menor de la ensambladura del bastidor.

Caso en que el bastidor está solicitado por una fuerza paralela á su plano y perpendicular á la direccion de las guias.

37. En cuanto al caso en que el bastidor estuviese oprimido lateralmente por fuerzas paralelas á su plano y perpendiculares al eje del movimiento, no solamente darán lugar á una presion y á un rozamiento sobre la cabeza de las lengüetas, sino tambien á presiones sobre sus caras paralelas al bastidor, las cuales modificarán las que provienen de las demás componentes de las fuerzas.

Sea (figª 40) el corte transversal del bastidor por un plano perpendicular á la direccion de las guias a y a':

Z una fuerza que obra en este plano paralelamente al eje CD del perfil de este bastidor;

x la distancia mb de esta fuerza ó de su punto de aplicacion al eje CD; z la de la proyeccion b de este punto al punto de apoyo de una de las correderas,

l en fin, la distancia entre los puntos de apoyo a y a' medida segun CD.

Se reemplazará la fuerza Z por otra igual que obre en direccion del eje CD y que ejerza sobre la cabeza de la lengüeta en a un rozamiento que podrá representarse por

$5Z$, y por un par que obrase en a y a' perpendicularmente á las caras de las correderas, cuyo valor será

$$Z\frac{x}{l}$$

prescindiendo del signo que se podrá determinar en cada caso segun lo que se ha esplicado anteriormente, y que será preciso además combinar con las presiones que provienen de las demas componentes de las fuerzas propuestas, que obran en los estremos superiores é inferiores del bastidor.

Rozamiento de los muñones de las piezas de rotacion.

Espresion de este rozamiento en los cojinetes cilíndricos.

38. Sea A (fig.ª 41) un muñon de un eje de una rueda cualquiera que gire sobre sí misma en la cabidad ú ojo cilíndrico $a\,m\,b$ de un cojinete cuyo centro es C; sea Bm la direccion indefinida de la resultante N de todas las fuerzas que obran sobre este muñon.

Considerando el movimiento de la rueda á partir del reposo, en que el punto de contacto del muñon y del cojinete se halla en m' y la resistencia N dirigida segun el radio $m'C$, se verá que la accion de las fuerzas aplicadas á

esta rueda, será, en primer lugar, hacer rodar el muñon A sobre el círculo amb, de m' hácia m, supongo, y esta rodadura tendrá lugar mientras que la resultante N pase fuera del punto de contacto m del muñon sobre el cojinete y mientras que su componente tangencial en este punto no sea capaz de vencer el rozamiento proveniente de la presion debida á su componente normal.

Llamando, pues,

f la relacion del rozamiento á la presion para las sustancias en contacto,

α el ángulo de N con la normal mC,

$N\cos\alpha$ será la presion que sufre m; $fN\cos\alpha$ el rozamiento que resulta de ella; en fin, $N\,\text{sen}\,\alpha$ la componente tangencial de N; se tendrá, pues, para determinar α,

$$fN\cos\alpha = N\,\text{sen}\,\alpha,\ \text{de donde}\ \text{tang.}\,\alpha = f.$$

Por consiguiente, la intensidad del rozamiento tendrá por valor

$$fN\cos\alpha = \frac{fN}{\sqrt{1+f^2}} = f'N \ \text{poniendo}\ \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f';$$

y su momento respecto al eje A que queda fijo, mientras que N es invariable, será igual á

$$\frac{fN}{\sqrt{1+f^2}}\,\rho = f'N\rho,$$

siendo ρ el radio mA del muñon.

Cuando el muñon A (figª 42) está absolutamente fijo y no forma cuerpo con la rueda, estando esta atravesada en su centro por un

eje cilíndrico para recibir aquel, se verifica todo del mismo modo sin mas diferencia que, como la rotacion se verifica al rededor del centro C del vacío, se deberá tomar para ρ el radio mC de este vacío y no mA."

Límite del ángulo de rodadura de los muñones.

40 Volviendo al caso de la figura 41, observaremos que la relacion $\tang. \alpha = f$, fija enteramente la posicion del punto m sobre el cojinete, y por consiguiente la longitud del arco mm';

Llamando, en efecto,

r el rádio $mC = m'C$ del vacío de este cojinete
γ el ángulo desconocido mCm' que forman estos dos rádios,
β el angulo mBm' que forma la direccion de N con la de $m'C$ prolongada,
$\alpha = CmB$, $\rho = Am$ como antes, se tendrá por el triangulo mBC para determinar γ y mm'

$$\gamma = \alpha + \beta, \quad mm' = (\alpha + \beta)\, r,$$

relaciones en que será preciso cambiar el signo de β si la interseccion B de Nm y $m'C$ estuviese situada del otro lado de m'.

En cuanto al angulo que ha descrito el sistema alrededor del eje A durante la rodadura del muñon de m' hacia m, se observará que si se toma sobre la circunferencia de este

muñon el arco $mm_1 = mm'$, el ángulo de que se trata será precisamente el que forma la direccion prolongada del radio Am_1 con la recta $m'C$ que representa su posicion primitiva.

Llamando pues θ á este ángulo se tendrá por el triángulo ACD

$$\theta = mAm_1 - mCm' = \frac{mm_1}{\rho} - \frac{mm'}{r} = mm'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right) = (\alpha+6)\left(\frac{r}{\rho} - 1\right),$$

fórmula en que todo es conocido, puesque

$\alpha =$ arc (tan $= f$)

El límite del angulo descrito por un sistema de rotacion en virtud de la simple rodadura de los muñones sobre los cojinetes, es principalmente util conocer en el caso en que la amplitud total del movimiento del sistema es susceptible tambien de un limite, como se verifica en las suspensiones en forma de cuchillo, en los balancines, y en ciertos sistemas articulados, porque las relaciones que preceden pondrian en estado de reducir el rozamiento del muñon á un rozamiento de rodadura ó de segunda especie cuya intensidad es mucho menor que el de la primera (13), sobre todo para los cuerpos metálicos y muy duros que se emplean en esta clase de sistemas. No habrá, en efecto, mas que establecer una relacion conveniente entre los radios ρ y r para que el angulo θ sea superior ó cuando menos igual á la amplitud de las oscilaciones.

En cuanto al caso (2.º) en que el movimiento de rotacion sea continuo; hay, por el contrario ventaja en disminuir el ángulo θ; así es que se da entonces al radio de los cojinetes un valor que no exceda al del radio de los muñones mas que en la cantidad estrictamente necesaria para el juego; disposicion que tiene la ventaja de aumentar la estabilidad del movimiento, y evitar sacudimientos perjudiciales en los instantes en que hay intermitencia de accion de parte de las fuerzas (seccion 1.ª, 24 y 33).

Rozamiento de los gorrones, espaldones &, de los ejes.

Momento y brazo de palanca medio del rozamiento de los círculos y de las coronas circulares

41. Sea NC (fig.ª 43) el eje de un gorron cilíndrico terminado por una base circular ab, que se apoya sobre el fondo plano del empotramiento $abef$ de un tejuelo, contra cuyos bordes está apoyado lateralmente. Supongamos que la resultante general de las fuerzas que obran sobre este eje, esté descompuesta en otras dos dirigidas, una segun este mismo eje, y la otra perpendicularmente á su superficie; esta dará lugar á un rozamiento cuya intensidad, y cuyo momento podrán calcularse como lo he-

mos indicado (38) para los muñones

En cuanto á la primera que llamaremos N y que se supone obra de N hacia C, producirá sobre la base a.b, una resistencia que tendrá por valor absoluto fN, siendo f el coeficiente del rozamiento para las sustancias en contacto; pero cuyo brazo de palanca no se conoce á priori.

Para determinarle se supone la presion N distribuida uniformemte sobre todos los puntos de la base a b, es decir, proporcionalmente á la estension de cada uno de sus elementos; asi, siendo n la presion sobre la unidad de superficie, la que se refiere á una corona ó zona circular limitada por los radios ρ y $\rho + d\rho$, estará representada por el producto $2n\pi\rho d\rho$; el rozamiento de esta corona por $2fn\pi\rho d\rho$ y el momento de este rozamiento por

$$2fn\pi\rho^2 d\rho,$$

siendo π la relacion de la circunferencia al diámetro.

Integrando este momento desde un valor cualquiera r' de ρ hasta otro igual á r se tendrá para el momento total del rozamiento de la corona comprendida entre los círculos de radios r y r';

$$2fn\pi\int_{r}^{r'}\rho^2 d\rho = \frac{2}{3}fn\pi(r^3 - r'^3);$$

pero la superficie de esta corona está medida por $\pi(r^2 - r'^2)$ y su rozamiento total por $fN = fn\pi(r^2 - r'^2)$; llamando pues x al brazo de palanca medio

de este último rozamiento se tendrá:

$f\,Nx = fn\pi(r^2 - r'^2)x = \frac{2}{3} fn\pi\,(r^3 - r'^3)$: de donde

$x = \frac{2}{3}\,\frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2} = \frac{2}{3}\,\frac{r^2 + rr' + r'^2}{r + r'}$.

Representando ademas por l la anchura de la corona, y por r_1 el rádio de su círculo medio, resultará $r = r_1 + \frac{1}{2} l$, $r' = r_1 - \frac{1}{2} l$ y $x = r_1 + \frac{l^2}{12 r_1}$, lo que demuestra que se podrá sin error sensible tomar r_1 para x, siempre que l sea menor que $\frac{1}{3} r_1$ por ejemplo.

Rozamiento de los gorrones de diferentes clases.

42. En el caso particular en que la base del gorron fuese un círculo entero de radio ρ, siendo r' nulo y $r = \rho$ se tendrá simplemente

$$x = \frac{2}{3}\,\rho\,.$$

Teniendo así el valor del brazo de palanca medio del rozamiento, no se tratará mas que de multiplicarlo por $f\,N$ para tener el momento de este rozamiento; y si se quiere apreciar directamente la cantidad de trabajo que destruye durante una revolucion entera del eje, no quedará evidentemente (seccion 1.ª nº 8) mas que multiplicar este momento por 2π.

En fin, si se quiere reemplazar la consideracion directa del rozamiento por la de una fuerza X, tangente al cilindro exterior del gorron, cuyo radio es r, y que fuese capaz de desarollar el mismo trabajo, basta en el caso

general de una corona circular, poner

$$2\pi r X = 2\pi \frac{2}{3} f N \frac{r^2+rr'+r'^2}{r+r'}, \text{ de donde}$$

$$X = \frac{2}{3} f N \left(1+\frac{r'^2}{r(r+r')}\right)$$

para la espresion del valor medio (id. 9) de este rozamiento, que se supone obra en el estremo del radio r.

Sucede algunas veces que, con objeto de disminuir el trabajo del rozamiento ó su brazo de palanca medio, se termina (figª 44) su base por un casquete esférico que descansa sobre una parte convexa del fondo del tejuelo. En otros casos (figª 45) se suprimen los rebordes de este tejuelo y el gorron está terminado por una porcion cónica unida por un casquete esférico mayor ó menor, y que se introduce en una cabidad practicada sobre la pieza que sirve de tejuelo. En fin, muchas veces tambien (figª 46) el tejuelo es el que forma el gorron, mientras que el empotramiento de la cabeza de este gorron está en el mismo eje; disposicion que ofrece la ventaja de preservar la superficie rozante del polvo que podria depositarse en ella cuando el eje es vertical, pero que tiene el inconveniente de dejar salir facilmente el engrasado.

En todos estos casos, vista la poca estension de esta superficie será suficientemente exacto tomar para brazo de palanca medio del ro-

zamiento fN, los $\frac{2}{3}$ del radio mayor á cuyo estremo obra. En cuanto al brazo de palanca medio del rozamiento que proviene de las presiones transversales ó perpendiculares al eje, se le supondrá igual á la distancia de este eje al centro de gravedad de la generatriz de la parte rozante del gorron, lo que equivale á admitir que estas presiones están distribuidas uniformemente sobre todos los puntos de apoyo de esta generatriz.

Rozamiento de los espaldones de los arboles; de los anillos, roldanas &.

43. Generalmente los árboles de las ruedas son mucho mas gruesos que sus muñones, cuyo diámetro y saliente se reduce tanto como lo permite la solidez, á fin de disminuir el brazo de palanca del rozamiento, que tiene una importancia esencial, como lo hemos visto; sucede así que, cuando los árboles estan solicitados por fuerzas que obran en sentido de su eje, una de las caras que los terminan se apoya lateralmente contra los cogineles ó apoyos de estos cogineles, y producen allí un rozamiento, cuyo brazo medio de palanca deberá calcularse por la formula (41)

$$x = r_1 + \frac{l^2}{12 r_1}$$

siendo l la anchura media de la corona, que roza sobre el espaldon del arbol, y r_1 el radio me-

dio de esta corona. Se ve, pues, cuan importante es el disminuir cada una de estas magnitudes.

En las máquinas bien construidas se reducen (figs. 47 y 48) los espaldones ó partes salientes del árbol á rebordes ó anillos cuyo diámetro excede muy poco al de los muñones, bien sea que estos anillos formen cuerpo con el árbol, ó bien, que desunidos, formen roldanas q.e se suelen colocar varias superpuestas, cuando se quiere evitar la influencia de las resistencias accidentales que podrian oponerse al movimiento de una de ellas. Algunas veces tambien, (fig.a 49) se mantiene un juego invariable entre los espaldones de los árboles y de los cojinetes, por medio de refuerzos cónicos ó anillares practicados sobre el contorno de los muñones y que ofrecen un vacio en la parte inferior, á fin de que el brazo de palanca del rozamiento tangencial de estos no aumente inútilmente.

Cuando el árbol está sometido á esfuerzos considerables en sentido de su eje; es mejor terminar los muñones por una punta redondeada (fig.a 50) en forma de gorron y apoyándose contra un espaldon exterior: resulta de aqui, en efecto, que se puede disminuir, por decirlo así, arbitrariamente el brazo de palanca del rozamiento. En fin, en los tornos giratorios, los martinetes, &, sucede, en general, que se suprimen enteramente los cojinetes de los muñones, ha-

ciendo descansar el árbol únicamente sobre las puntas de los gorrones, que desgastándose muy pronto entonces, exigen que los espaldones y apoyos se aprieten con frecuencia por medio de cuñas ó de roscas de presion.

Cuando grandes piezas planas tales como las tuercas de las grandes roscas, ciertos platillos ó puentes giratorios &ª, deben descansar sobre espaldones en puntos situados á cierta distancia del eje de rotacion; se disminuye el brazo de palanca del rozamiento y su intensidad interponiendo entre estos platillos y estos espaldones (fig.ª 51) una banda anular de hierro a b c concéntrica á este eje, resbalando en un tejuelo de rebordes de cobre que se mantiene lleno de grasa.

Algunas veces tambien se sustituye el uso de rodajas ó ruedecillas al de la banda anular, de lo cual hay ejemplos en los puentes giratorios nuevamente construidos en el canal de San Martin, en Paris, y en otros muchos sistemas que se emplean en las construcciones públicas, y en las máquinas; he aquí por qué entraremos en algunos detalles sobre la teoria de las resistencias de estas rodajas que estan sujetas á inconvenientes muy graves, cuando se les da pequeñas dimensiones, consistiendo el principal, en que, desgastándose desigualmente,

sería muy pronto por no girar.

Resistencia de las ruedas y rodajas.

Resistencia de las ruedas de eje fijo.

44. Sea una rueda de eje fijo C (fig.ª 52) que sostiene una carga P colocada sobre un platillo AB al que hace mover horizontalmente la potencia F; es evidente que esta potencia no tendrá que vencer mas que el rozamiento de resbalamiento en C y de rodadura en T, proveniente el primero de la carga, del peso de la rueda que llamaremos p y de la potencia F, resultante que tiene aquí por valor

$$\sqrt{(P+p)^2+F^2}$$

Si la rueda no tuviese la libertad de girar alrededor de su eje C, el rozamiento desarrollaría en T una resistencia fP, que produciría, para un camino e recorrido por el punto de aplicacion F, la cantidad de trabajo

$$fe = fPe$$

siendo siempre f el coeficiente del rozamiento directo relativo á las sustancias en contacto, (8).

Si, por el contrario, gira la rueda sobre su eje, se desarrollará sobre este eje un rozamiento medido (38) por

$$\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\sqrt{(P+p)^2+F^2}=f'(P+p)$$

si se puede despreciar F^2 respecto de $(P+p)^2$. Se desarrollará además en el punto de contacto T de la rueda y del platillo que sostiene un rozamiento de segunda especie medido por

$$2 A \frac{P}{D}$$

conservando las denominaciones y convenios de los números 14 y 15.

Llamando además $R = \frac{1}{2} D$ al radio de la rueda, r al de su eje, es claro que el camino descrito por F en T siendo e, el que describe el punto de aplicacion del rozamiento $f(P+p)$ de este eje, será $\frac{re}{R}$, de suerte que se tendrá (14, 16 y 38) en los supuestos actuales, para el trabajo de la potencia F á lo largo de e.

$Fe = A \frac{P}{R} e + f' \frac{(P+p)r}{R} e$, y por consiguiente

$F = A \frac{P}{R} + f' \frac{P+p}{R} r$: lo que demuestra que el esfuerzo de la potencia disminuye indefinidamente á medida que el rádio de la rueda aumenta, ya de un modo absoluto, ya respecto del eje.

De todos modos la relacion anterior supone que la rueda así como el platillo estan convenientemente dispuestos y que giran en efecto, lo que exige principalmente que el rozamiento directo fP en T, por cuyo medio trasmite la potencia F su accion á esta rueda (y que sería el que únicamente se desarrollase en el caso en que estuviera inmovil) no tenga un valor menor que la cantidad ....

$$A\frac{P}{R}+f'\frac{(P+p)r}{R}.$$

Ahora bien, el movimiento de rotacion estaria impedido infaliblemente, si el platillo ó la rueda contuvieren á causa del uso ó de cualquier otro accidente, asperezas ó desigualdades bastante fuertes para que el momento de P respecto de C fuese mayor que el del rozamiento fP, lo cual suele ocurrir en las ruedecillas.

Influencia de las desigualdades del suelo sobre el movimiento de las rodajas.

45. Consideremos, por ejemplo la de la figura 53 en que haya un obstáculo interpuesto en a detrás de T respecto de F cuyo saliente ab, sobre la circunferencia de la rodaja, es h, y l la distancia aT; se observará que la rodadura en lugar de hacerse alrededor del punto T, tiende á efectuarse alrededor de a, de suerte que la potencia F que obra en el primer instante con el brazo de palanca $CT=Cb=R$ debe, por intermedio del rozamiento fP, que se desarrolla en el punto a vencer ó elevar la carga P que obra en este punto con el brazo de palanca $CD=aT=l$ respecto al eje C; lo que aumenta en este primer instante la resistencia $f'(P+p)\frac{r}{R}$ debida al eje C, en la cantidad

$$P\frac{l}{R}=P\sqrt{\frac{ab(2R+ab)}{R^2}}=P\sqrt{\frac{h(2R+h)}{R^2}}=P\sqrt{\frac{2h}{R}}$$

suponiendo h muy pequeña respecto de R. Se

tendrá, pues entonces,

$$F = \frac{Pl}{R} + f'\frac{P+p}{R}r = P\sqrt{\frac{2h}{R}} + f'\frac{P+p}{R}r;$$ despreciando la consideracion del rozamiento de segunda especie que se desarrolla en a a causa del movimiento relativo del platillo y de la rodaja, y cuya velocidad virtual es nula ó infinitamente pequeña respecto de la de este platillo.

Si este valor de F fuese superior al rozamiento directo fP, que se produce en a en el caso en que la rodaja permaneza inmovil, sucederá efectivamente, que no girará esta, y que la resistencia estará simplemente medida por fP, como en el resbalamiento ordinario de los cuerpos sólidos. Aun cuando continúe la rotacion y el obstáculo llegue hasta el punto T, no podrá abandonar el platillo sin que haya un choque. Se ve, pues, que la irregularidad del movimiento producirá necesariamente una pérdida de fuerza viva apreciable (seccion 1ª. nº. 19), sin contar que hay muchos casos en que, el movimiento de ascension del platillo está impedido por obstáculos invencibles, y se producen, por consiguiente, apuntalamientos que dan lugar á resistencias que pueden no tener ningun límite, ó que, cuando menos, hacen imposible la rotacion de la rodaja.

Resistencias de las ruedas y rodajas de eje móvil.

46. La mayor parte de estas observaciones son aplicables al caso de una rueda (fig.ª 54) solicitada por una potencia F aplicada directamente á su eje C que no gira ya, sino que es trasportado paralelamente al suelo de nivel AB al mismo tiempo que esta rueda.

Llamando siempre P la carga que descansa aquí directamente sobre el eje, y p el peso mismo de la rueda se tendrá evidentemente

$$Fe = \frac{A(P+p)e}{R} + f'\frac{r}{R}e\sqrt{P^2+F^2},\quad F = \frac{A(P+p)}{R} + f'P\frac{r}{R}$$

si puede despreciarse F^2 respecto de P^2 debajo del radical.

En el caso en que un obstáculo cualquiera, sólido ab estuviese interpuesto entre el suelo y la circunferencia de la rueda, se verificarian fenómenos análogos á los que hemos hecho observar anteriormente.

47. Estableciendo la ecuacion anterior una relacion entre la constante A que parece no debe variar sino con la constitucion física del suelo y de la rueda, y las otras diferentes magnitudes F, r, R, P y f' que pueden estar dadas á priori, ó por la esperiencia, se ve que;

si la ley observada por Coulomb (13) para la resistencia á la rodadura, es cierta en las diversas circunstancias que puedan ocurrir, será posible deducir de dicha ecuacion los valores de esta constante A para cada caso particular; la ecuacion en cuestion dá, en efecto,

$$A = R\left(\frac{F}{P+p} - f'\frac{r}{R}\sqrt{\frac{F^2}{(P+p)^2} + \frac{P^2}{(P+p)^2}}\right)$$

Interin se hagan experiencias directas respecto de esto; se pueden emplear los resultados obtenidos por el Conde de Rumfort, Mr. Boulard, y otros Ingenieros, sobre el tiro de los carruages á lo largo de las carreteras y de los caminos de tierra; así, hemos formado la tabla siguiente de los valores de A, en la que hemos incluido tambien los resultados que hemos referido en los números 13 y 16 segun las experiencias de Coulomb.

Resistencia de las ruedas y rodillos en movimiento sobre superficies planas de diversa naturaleza (*)

Indicacion de las ruedas y superficies	Valores de $\frac{F}{P+p}$ dados por la esperiencia	Valores correspondientes de A	Observaciones
Ruedas de carruages guarnecidas de bandas de hierro, sobre un camino horizontal	. . . .	. . . . . .	Véanse las esperiencias de Mr Boulard en el Diario de física 1785 y las del Conde de Rumfort. Biblioteca británica de ciencias y artes, tomo 47
En arena ó guijo recientemente colocado	$\frac{1}{8}$	0,0634	
En afirmado, en estado ordinario de conservacion	$\frac{1}{12}$	0,0414	
En empedrado en el mismo estado	$\frac{1}{20}$	0,0238	Velocidad de $0^m,8$ á 1^m por segundo
En adoquinado de piedra arenisca, bien conservado	$\frac{1}{25}$	0,0185	Velocidad de $0^m,8$ á 1^m por segundo
En afirmado en perfecto estado	$\frac{1}{30}$	0,0150	Esperiencias en los caminos de Inglaterra
En tablones de encina sin labrar	$\frac{1}{46}$	0,0102	Memoria de Regnier 5º cuaderno del diario de la Escuela Politécnica

(*) Para obtener los números de esta tabla hemos admitido los valores y relaciones siguientes de las diversas cantidades: para ruedas de carruages ordinarios

$R = 0^m,60$, $\frac{r}{R} = \frac{1}{24}$, $f' = 0,12$, $\frac{P}{P+p} = \frac{22}{25}$

para las ruedas de carruages de caminos de hierro,

$R = 0^m,40$, $\frac{r}{R} = \frac{1}{12}$, $f' = 0,08$ $\frac{P}{P+p} = \frac{7}{8}$

Estos valores y los de $\frac{F}{P+p}$ puestos en la tabla, estan conformes con los adoptados

Indicación de las ruedas y superficies.	Valores de $\frac{F}{P+p}$ dadas por la experiencia	Valores correspond.tes de A.	Observaciones
Ruedas de hierro fundido sobre carriles horizontales, planos	$\frac{1}{60}$	0,0035	Estos resultados suponen los carriles y ruedas en estado ordinario.
Id. estrechos y salientes	$\frac{1}{100}$	0,0012	
Id. perfectam.te conservados	$\frac{1}{150}$	0,0007	
Rodillos de madera de olmo ó encina sobre pavimento liso	....	0,0074	
Id de olmo sobre pavimento de encina	....	0,0016	Los rodillos y el suelo perfectamente labrados.
Id. de guayaco sobre id. id.	....	0,0010	

Límite en que cesa la rodadura y empieza el resbalamiento.

48. La condicion para que las ruedas cuyo eje avanza á lo largo de un plano AB (fig.ª 54) resbalen sin girar sobre este plano, está siempre expresada (46) por la desigualdad

$$f(P+p) < F = \frac{A(P+p)}{R} + f'\frac{Pr}{R}, \text{ ó } f < \frac{A}{R} + f'\frac{r}{R}\left(\frac{P}{P+p}\right)$$

Ahora bien, esta circunstancia se verifica algunas veces, en efecto, aun para las ruedas de car-

por M.r Navier en sus lecciones de la Escuela de puentes y calzadas. En cuanto al valor de A relativo á las ruedas de carruages ordinarios, moviendose sobre tablones horizontales, se ha obtenido suponiendo $R = 0^m,60$, $\frac{r}{R} = \frac{1}{12}$, $f' = 0,05$ siendo los ejes de madera y engrasados.

ruages ordinarios cuando estas ruedas son bajas, estan poco untadas de grasa y caminan sobre un suelo perfectamente liso, principalmente sobre un suelo recubierto de hielo ó de nieve endurecida, para el cual, el valor de f puede reducirse (9) á 0,0140. Siendo, por ejemplo $\frac{P}{P+p} = \frac{22}{25}$, $f' = 0,12$, $\frac{r}{R} = \frac{1}{24}$, $R = 0,6$ se tendrá $\frac{F}{P+p} = 1,67\ A + 0,0044$

y será preciso que esta cantidad exceda á 0,014, para que haya resbalamiento sin rodadura, lo que exige que A sea superior á

$$(0,014 - 0,0046)\,0,6 = 0,0057\,;$$

resultado que no presenta nada que no se pueda admitir, y cuyo esceso sobre la mayor parte de los de la tabla (47) tiene su esplicacion natural en la compresibilidad bastante grande del hielo ó de la nieve. Esta preponderancia de la resistencia á la rodadura que se aumenta por espesarse los engrasados del eje en los tiempos frios, es á quien hay que atribuir el uso esclusivo de los trineos en los paises en que el invierno es de larga duracion.

Del uso de las rodajas para disminuir la resistencia de las piezas rozantes de las máquinas

50. Haciendo uso de los datos precedentes se estará en el caso de calcular aproximadamente la resistencia que presentan las ruedecillas ó rodajas empleadas para disminuir el rozamiento directo de los

cuerpos en movimiento unos sobre otros; rodajas que muchas veces llevan una garganta anular destinada á abrazar las lengüetas salientes, que constituyen entonces su camino, y cuyos rebordes impiden al sistema desviarse lateralmente. Se ve, por ejemplo, que si se trata de piezas dotadas de un movimiento rectilíneo, tales como las que nos han ocupado en los números 33 y siguientes y que esten dirigidas en este movimiento por rodajas adaptadas, ya á estas piezas mismas, ya á las guias, no habrá que hacer mas que calcular como se ha indicado en estos números, la presion que sufre, tanto el eje como el punto de apoyo de cada rodaja; luego determinar, segun las consideraciones anteriores, las resistencias á q.e dan respectivamente lugar para sustituirlas en la ecuacion de equilibrio del número 33 en vez de las resistencias fN, fN' que resultarian del rozamiento directo.

En cuanto al caso en que las rodajas estuviesen interpuestas entre dos plataformas, una fija y otra movil alrededor de un eje dado; disposicion de que se ha hecho ya mencion en el número 41, no presentará mayores dificultades, si las chapas de las rodajas forman cuerpo con una ú otra de estas plataformas, porque cualquiera que sea el modo como se distribuya la presion sobre el sistema de estas rodajas, se

podrá siempre evaluar la resistencia absoluta ó total en el sentido propio del camino descrito por el punto de la plataforma movil que correspon-de al medio de su eje, y no quedará mas que multiplicar esta resistencia por este camino ó por su distancia al eje de rotacion general del sistema para obtener el trabajo ó el momento respecto á este mismo eje.

En efecto, conservando las denominaciones de los numeros 44 y 46, se tendrá aproximadamente para cada rodaja en particular,

$$F = A\,\frac{P+p}{R} + f'\,\frac{r}{R}\,P\,,$$

si la carga hace parte de la plataforma movil; ó

$$F = A\,\frac{P}{R} + f'\,\frac{r}{R}\,(P+p)$$

si está unida á la plataforma fija: siendo P la presion indeterminada sostenida por la rodaja de parte de esta última; será imposible calcular la resistencia individual F; pero si se hace para cada caso la suma de todas las resistencias semejantes se tendrá

en el 1.º $\Sigma F = \frac{A}{R}\,\Sigma(P+p) + f'\frac{r}{R}\,\Sigma P$; y

en el 2.º $\Sigma F = \frac{A}{R}\,\Sigma(P) + f'\frac{r}{R}\,\Sigma(P+p)$

relaciones en que no existe indeterminacion alguna, pues que $\Sigma(P)$ indica la suma de las presiones sufridas por las rodajas.

Disposicion relativa á las rodajas de las plataformas giratorias.

51. Sucede muchas veces, y aun conviene para evitar la resistencia sobre los ejes de las rodajas, que estos se hagan independientes de las dos plataformas, y entonces la rodadura se verifica sobre cada una de ellas como en el caso del número 16, sino es que los ejes dan aquí lugar á un exceso de resistencia cuya intensidad es, en cierto modo, indeterminada, y depende mucho menos de la presion recíproca de las plataformas, que de los accidentes particulares ó imperfecciones, que presentan las superficies de las rodajas y las superficies de apoyo, que se tiene cuidado además de revestir de bandas ó carriles de hierro, salientes.

En efecto, las rodajas no pueden estar aquí enteramente libres ó privadas de ejes que las dirijan en su curso, en razon á que el menor obstáculo las haria caminar desigualmente y desviaria de su camino; por consiguiente, se embarazarian mutuamente y serian mas perjudiciales que útiles. A fin, pues, de asegurar la direccion de su movimiento, se las une entre sí (fig.ª 55) por dos grandes anillos de hierro concéntricos al eje general y á los que se adaptan transversalmente los pasadores ó ejes; estos anillos están además unidos al eje de que se

trata, por brazos que tienen la libertad de moverse con rozamiento suave sobre su contorno. Algunas veces estan, tambien, articulados estos anillos o chapas generales en su union con cada eje de rodaja; á fin de evitar toda especie de obstáculo en el movimiento, pero á no ser contando con una ejecucion perfecta y minuciosos cuidados en la conservacion de las rodajas y de las bandas rozantes, no se debe contar con la supresion completa del rozamiento de los ejes que tienen además que sostener el peso de los sistemas de chapas y de la mitad próximamente de los brazos que los unen al eje de rotacion general. Llamando q este peso, q' el que carga la corona rozante por la que estan reunidos los brazos del eje en cuestion; R' la longitud de estos brazos, se tendrá evidentemente, para la resistencia total X de semejante sistema, referida al círculo medio de los ejes de las rodajas,

$$X = \Sigma F = \frac{A}{2R}\,\Sigma(P+p) + \frac{A'}{2R}\,\Sigma(P) + \frac{fr}{R}\,q + \frac{fq'}{R'}\left(r_{,} + \frac{l^2}{12\,r_{,}}\right);$$

conservando las condiciones y denominaciones de los números 16, 41 y 47 y suponiendo además aplicada la potencia al platillo giratorio, lo que es conveniente si se trata de disminuir la intensidad absoluta de la resistencia (16) aumentando el camino descrito por el punto de aplicacion de la fuerza motriz; y si se quieren evitar

al mismo tiempo los esfuerzos de traccion, bastante grandes y variables, que sufririan, en sentido del camino que describen los ejes de las rodajas, si esta fuerza estuviera inmediatamente aplicada á los anillos de las chapas.

Tales son las disposiciones adoptadas para la maniobra de los puentes giratorios del canal de San Martin, en Paris, y en muchas plataformas giratorias de los caminos de hierro.

Condiciones de equilibrio en el torno, atendiendo al rozamiento y á la rigidez de las cuerdas

Solucion general en el caso en que el eje es horizontal, y las fuerzas estan comprendidas en planos que le son perpendiculares.

55. Sea (figª 56) un torno cuyo árbol horizontal A A' está sostenido hácia sus extremos por dos muñones que descansan sobre los cojinetes fijos A y A'; y solicitado á moverse por la potencia P y la resistencia Q, que obran por intermedio de cuerdas ó correas que supondremos situadas en planos perpendiculares al eje A A'. Llamemos

M el peso total del torno cuyo centro de gravedad G supondremos situado sobre el eje A A'

R y r los radios de las ruedas á cuyos extremos

obran P y Q

ρ y ρ' los radios de los muñones A y A',

d el diámetro de la cuerda solicitada por Q,

p, q, m y l las distancias respectivas de P, de Q, de M y del punto de apoyo A al A',

α y β los ángulos de P y de Q con la vertical,

N y N' las resultantes de los esfuerzos ejercidos respectivamente sobre los puntos de apoyo A y A'

θ y θ' los ángulos que forman estas resultantes con la vertical, y f_1, f_1' los valores de $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ (38) para los muñones A y A',

$\frac{ad^{\mu}+bd^{\mu}Q}{2r}$ la resistencia (17) ocasionada por la rigidez de la cuerda que se arrolla del lado de Q.

Se principiará por descomponer cada una de las fuerzas P y Q en otras dos, segun la vertical y horizontal, despues se descompondrán á su vez estas últimas, así como el peso M del torno; en otras dos que sean paralelas y situadas en planos perpendiculares en A y A', al eje del torno y á distancias iguales de este eje; se hallará de este modo

Para el punto A. { Suma de las compon.^tes vertic.^s $\frac{Mm}{l}+Q\frac{q}{l}\cos\beta+P\frac{p}{l}\cos\alpha=Y$
id de las horizont.^s $Q\frac{q}{l}\operatorname{sen}\beta-P\frac{p}{l}\operatorname{sen}\alpha=X$

Para el punto A' { id de las verticales $\frac{M(l-m)}{l}+\frac{Q(l-q)}{l}\cos\beta+\frac{P(l-p)}{l}\cos\alpha=Y'$
id de las horizont.^s $Q\frac{(l-q)}{l}\operatorname{sen}\beta-P\frac{(l-p)}{l}\operatorname{sen}\alpha=X'$

espresiones en que será preciso cambiar el signo de p ó de q, si P ó Q obran fuera de A A'.

Se tendrá, pues, observando que las resultantes de las fuerzas contenidas en cada plano deben pasar respectivamente (38) por los puntos de apoyo correspondientes de los muñones cuando el torno ha llegado á su posicion de equilibrio ó de estabilidad,

$$N=\sqrt{X^2+Y^2}=\frac{1}{l}\sqrt{(Mm+Qq\cos\beta+Pp\cos\alpha)^2+(Qq\,\mathrm{sen}\,\beta-Pp\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2}$$

$$N'=\sqrt{X'^2+Y'^2}=\frac{1}{l}\sqrt{(M(l-m)+Q(l-q)\cos\beta+P(l-p)\cos\alpha)^2+(Q(l-q)\,\mathrm{sen}\,\beta \ldots}$$

$$\overline{\ldots-P(l-p)\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2}; \quad \mathrm{tang}\,\theta=\frac{X}{Y} \quad ; \quad \mathrm{tang}\,\theta'=\frac{X'}{Y'}$$

valores en que los últimos servirán en union con los signos de X é Y, de X' é Y', para hacer conocer la direccion y el sentido de la accion de las resultantes N y N'.

Como el equilibrio debe tener lugar alrededor del eje C del torno, entre la potencia P, la resistencia Q, la rigidez de la cuerda que se arrolla del lado de Q, y en fin, los rozamientos $f_1 N$, $f_1' N'$; se tendrá por la teoría ordinaria de los momentos,

$$PR=Qr+\frac{d^{\mu}(a+bQ)r}{2r}+f_1 N\rho+f_1' N'\rho'$$

ecuacion en que será preciso no introducir sino los valores absolutos de N y N'; y que será en general, del 4.º grado en P.

Caso en que las fuerzas tengan direcciones cualesquiera.

56 En el caso en que el sistema estuviese

solicitado por una ó muchas fuerzas no comprendidas en planos perpendiculares al eje A A', será preciso, así como se ha hecho en la cuestion del núm.º 33, reemplazar cada una de ellas por otras dos que obren en el mismo punto, y en que una de ellas, comprendida en semejante plano, deberá tratarse como las fuerzas P y Q; y la otra paralela al eje A A', podrá á su vez ser reemplazada por una fuerza igual dirigida segun este eje y por un par (38) que obre perpendicularmente á su direccion en los puntos de apoyo A y A', par, que será preciso comprender en el número de las demas fuerzas que obran sobre los muñones, para obtener los nuevos valores de las resultantes N y N'.

En cuanto á las componentes que obran segun el eje A A', se las compondrá en una sola igual á su suma y cuya intensidad absoluta medida por N, producirá sobre el espaldon contra el que obliga á apoyarse lateralmente al arbol, ó la cabeza del muñon; un rozamiento f N, cuyo brazo de palanca medio deberá calcularse como se ha explicado en el núm.º 42, y cuyo momento se añadirá á los de las demas resistencias en la ecuacion de equilibrio, anterior.

Métodos abreviados para resolver la ecuacion de equilibrio

57. A fin de simplificar la resolucion numérica de esta misma ecuacion, se emplea ordinariamente el método de las sustituciones sucesivas: se desprecian primeramente los términos en f, y f_1 lo que dá

$$PQ\frac{r}{R} + \frac{d^{u}(a+bQ)}{2r}\cdot\frac{r}{R};$$

se sustituye este primer valor, un poco pequeño en lugar de P bajo los dos radicales, lo que suministra un nuevo valor de P mucho mas exacto y que se puede sustituir á su vez bajo estos mismos radicales para obtener un tercero y así sucesivamente: pero á causa de la pequeña influencia del rozamiento de los muñones sucede casi siempre, en la práctica que puede limitarse á la primera sustitucion.

Los resultados de la nota 1.ª (*) colocada al fin de esta 3.ª seccion ponen además en estado de resolver en cada caso de un modo general, y con un grado de aproximacion muy suficiente, la ecuacion de que se trata, que se halla así reducida á otra de primer grado en P y Q.

Considerando, por ejemplo, el radical $\sqrt{X^2+Y^2}$ que espresa el valor de N, se le reemplazará por la cantidad lineal y racional

$0,828\,(X+Y)$ exacta hasta $\frac{1}{6}$ próxima

(*) Se ha omitido la traduccion de esta nota de Poncelet en que se demuestran detalladamente los grados de aproximacion con q.ᵉ pueden transformarse las espresiones radicales en lineales.

mente,

si no se conoce el orden de magnitud de X é Y; ó por esta otra

$0,96\,Y + 0,4\,X$ exacta hasta $\frac{1}{25}$, si se sabe de antemano que Y escede á X &ª.

Sustituyendo, pues, este valor aproximado de N y el análogo de N' en la ecuacion de equilibrio anterior, se deducirá inmediatamente P en funcion de Q con un grado de aproximacion muy suficiente aun en el primer supuesto, atendiendo á la pequeña influencia del rozamiento de los muñones

Simplificacion relativa al caso mas general de las aplicaciones.

58. En el caso mas general se tendrá:

$\rho = \rho'$, $f_1 = f_1'$ y $f_1 N \rho + f_1' N' \rho' = f_1 \rho (N + N')$:

además, como las fuerzas P y Q obran en el mismo sentido que M para comprimir los muñones, los valores de Y é Y' de X y X', tales como se han escrito anteriormente, son todos positivos, de suerte, que si, como sucede muchas veces, se tiene al mismo tiempo $Y > X$, $Y' > X'$, se podrá tomar á $\frac{1}{25}$ de aproximacion.

$N + N' = 0,96(Y + Y') + 0,4(X + X') = 0,96(M + Q\cos\beta + P\cos\alpha) + 0,4(Q\,\text{sen}\,\beta - P\,\text{sen}\,\alpha)$

ó á $\frac{1}{6}$ solamente, si se ignora el orden de magnitud de X y X', de Y é Y',

$N + N' = 0,83(Y + Y' + X + X') = 0,83(M + Q\cos\beta + P\cos\alpha + Q\,\text{sen}\,\beta - P\,\text{sen}\,\alpha)$,

Una y otra de estas espresiones son, como se ve, las mismas que se obtendrian directamente, si en lugar de descomponer cada una de las fuerzas propuestas en planos perpendiculares á cada muñon, para buscar separadamente las resultantes N y N' se las hubiese supuesto desde luego comprendidas en un solo plano y aplicadas al mismo punto; lo que hubiera dado para la resultante general, la espresion radical

$$\sqrt{(M+Q\cos\beta+P\cos\alpha)^2+(Q\,\mathrm{sen}\,\beta-P\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2}=\sqrt{M^2+Q^2+P^2+2M(Q\cos\beta+P\cos\alpha)+\ldots 2PQ\cos(\alpha+\beta)}$$

que se toma generalmente en efecto, para el valor de la fuerza total que solicita á los muñones y produce sus rozamientos que se suponen concentrados en uno solo. Pero esta hipótesis no conduce verdaderamente sino á resultados mas ó menos aproximados, y que pueden resultar defectuosos siempre que las componentes Y é Y', X y X' tiendan á comprimir los muñones contra puntos opuestos de los cojinetes.

En este último caso, atendiendo á que no se deben tomar sino los valores absolutos de las fuerzas de que se trata para sustituirlos en las sumas $X+X'$ é $Y+Y'$, habrá precision de cambiar el signo algebraico y natural de la fuerza que es negativo, lo que impedirá que se verifique la reduccion anterior. Por ejemplo, podria suceder que,

en ciertos casos, se tuviese al mismo tiempo

$Q\frac{q}{l}\,\mathrm{sen}\,\beta > P\frac{p}{l}\,\mathrm{sen}\,\alpha$, $Q\left(\frac{l-q}{l}\right)\mathrm{sen}\,\beta < P\frac{l-p}{l}\,\mathrm{sen}\,\alpha$ y entonces, en lugar de $X+X' = Q\,\mathrm{sen}\,\beta - P\,\mathrm{sen}\,\alpha$, se tendria

$$X+X' = Q\,\mathrm{sen}\,\beta\left(\frac{2q}{l}-1\right) - P\,\mathrm{sen}\,\alpha\left(1-\frac{2p}{l}\right)$$

lo que es bien diferente

Estas observaciones son enteramente semejantes á las que hemos presentado en el num.º 35 en ocasion en que tratábamos del rozamiento de las piezas rectilíneas contra sus guias; y manifiestan que es preciso distinguir cuidadosamente, en cada caso el sentido de la accion de las fuerzas y las relaciones entre sus intensidades, para poder distinguir y juzgar del signo de las componentes X y X', Y é Y; y por consiguiente, si puede ser permitido sustituir la consideracion de una resultante única á la de las resultantes distintas N y N'; esto será siempre posible cuando los datos y las condiciones del sistema se hallen numérica y completamente establecidas.

Ejemplo relativo al torno destinado á elevar cargas.

59. En el torno destinado á elevar cargas no hay incertidumbre ninguna; Q es vertical; $\beta = 0$, y las componentes horizontales X y X' de N y N' se reducen (55) á las fuerzas

$$P\frac{p}{l}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,,\quad P\frac{(l-p)}{l}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,,$$

que obran en el mismo sentido para comprimir

los muñones (*). La ecuacion de equilibrio puede reemplazarse así por la siguiente, observando que las componentes de que se trata son respectivamente menores que las componentes verticales Y é Y'.

$$PR = Qr + \frac{d^{u}(a+bQ)}{2r}\, r + f'\rho\left[0,96(M+Q+P\cos\alpha)+0,4\,P\,\mathrm{sen}\,\alpha\right]$$

de la que se saca

$$P = \frac{Qr + \frac{1}{2}d^{u}(a+bQ) + 0,96 f_1\rho(M+Q)}{R - f_1\rho(0,96\cos\alpha + 0,4\,\mathrm{sen}\,\alpha)}$$

con un grado de aproximacion muy suficiente para las aplicaciones generales.

Los valores generales (55) de N y N', son por sí mismos racionales en el caso particular en que P fuese vertical y α nulo, al mismo tiempo que β; será por consiguiente mas exacto lo-

(*) Si P obrase mas allá del muñon A' respecto de A, P resultaria negativo y se tomaria

$$N = 0,96\left[M\frac{m}{l} + Q\frac{q}{l} - P\frac{p}{l}\cos\alpha\right] + 0,4\,P\frac{p}{l}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$N' = 0,96\left[M\frac{l-m}{l} + Q\frac{l-q}{l} + P\left(\frac{l+p}{l}\right)\cos\alpha\right] + 0,4\,P\frac{l+p}{l}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

y por consiguiente

$$N + N' = 0,96(M+Q+P\cos\alpha) + 0,4\,P\frac{l+2p}{l}\,\mathrm{sen}\,\alpha$$
$$P = \frac{Qr + \frac{1}{2}d^{u}(a+bQ) + 0,96 f_1\rho(M+Q)}{R - f_1\rho\left(0,96\cos\alpha + 0,4\frac{l+2p}{l}\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)}$$

valor que no difiere del que está dado en el testo, sino en que $\mathrm{sen}\,\alpha$ está reemplazado por $\frac{l+2p}{l}\,\mathrm{sen}\,\alpha$ en el denominador; pero como la solidez del arbol exige en las hipotesis actuales que la parte saliente p sea muy pequeña respecto de l se podrá casi siempre limitarse al valor del testo cuyo denominador puede simplificarse siempre que siendo agudo el angulo α se tenga $\cos\alpha > \mathrm{sen}\,\alpha$; porque entonces el factor $0,96\cos\alpha + 0,4\,\mathrm{sen}\,\alpha$ será á $\frac{1}{25}$ de aproximacion, igual á la unidad

mar

$$P = \frac{Qr + \frac{1}{2}d^{m}(a+bQ) + f.\rho(M+Q)}{R - f.\rho};$$

reemplazando así los coeficientes numéricos 0,96 y 0,4 por 1 y 0, atendiendo á que aquí (según se demuestra en la nota ya citada), las relaciones de Y á X y de Y' á X' resultan infinitas.

En general, y para mayor aproximacion conviene no olvidar que estos coeficientes son susceptibles de cambiar de valores con las relaciones de que se trata.

Examen particular del caso en que la potencia es paralela y de signo contrario á la resistencia

50. En el caso en que α en lugar de ser nulo fuese de 180°, es decir que P obrase verticalmente en un sentido contrario de M y de Q se podría aplicar la misma solucion cambiando simplemente el signo de f.ρ en el denominador de la fraccion anterior; porque las componentes de P que obran sobre los muñones tendrian generalmente un valor menor que la suma de las que provienen de M y de Q. Pero si α es nulo y por consiguiente P cos α positivo siendo β = 180° y Q cos β = −Q habría lugar de considerar las distintas expresiones de N y N' que se reducirian entonces (55) á las siguientes:

$$N = \frac{Mm}{l} + \frac{Pp}{l} - \frac{Qq}{l}$$

$$N' = \frac{M(l-m)}{l} + \frac{P(l-p)}{l} - Q\frac{(l-q)}{l}$$

de las que habrá que tomar siempre los valores absolutos para sustituirlos en la ecuacion general de equilibrio.

Suponiendo, por ejemplo, que el exámen á priori de los datos de la cuestion, manifiesta desde luego que N y N' son esencialmente positivos, lo que por otra parte sucederá necesariamente á causa de $P > Q\frac{r}{R}$, cuando se tenga á la vez,

$$Mm + Q\frac{r}{R}p > Qq,\ M(l-m) + Q\frac{r}{R}(l-p) > Q(l-q),\ \text{ó}$$

$$\frac{M}{Q} > \frac{q}{m} - \frac{r}{R}\cdot\frac{p}{m} > \frac{l-q}{l-m} - \frac{r}{R}\ \frac{(l-p)}{l-m},$$

y resultará

$$N + N' = M + P - Q,\ P = \frac{Qr + \frac{1}{2}d^{u}(a+bQ) + f_1\rho(M-Q)}{R - f_1\rho}$$

lo que supone aun $M + P > Q$, condicion naturalmente supuesta en las dos anteriores.

Si, al contrario, la discusion manifiesta que N y N' son esencialmente negativos, bastará únicamente cambiar el signo de f_1 en el valor general de P.

En fin, si N y N' fuesen de signos diferentes se tendria,

$$N + N' = \pm\left[M\left(\frac{2m}{l} - 1\right) - Q\left(\frac{2q}{l} - 1\right) + P\left(\frac{2p}{l} - 1\right)\right]$$ de donde

$$P = \frac{Qrl + \frac{1}{2}d^{u}(a+bQ)l \pm f_1\rho\left[M(2m-l) - Q(2q-l)\right]}{Rl \mp f_1\rho(2p-l)}$$

correspondiendo el signo superior de f_1 al caso en que la cantidad $M\left(\frac{2m}{l} - 1\right) - Q\left(\frac{2q}{l} - 1\right) + P\left(\frac{2p}{l} - 1\right)$ fuese po

sitiva; y el signo inferior al caso contrario en que fuese negativa.

Cálculo de las resistencias en las poleas; el torno chino y el cabrestante.

De la polea fija.

62. En el caso particular de la polea, las fuerzas P y Q obran á la misma distancia r del eje y estan comprendidas en un plano que divide en dos partes iguales al intérvalo de los muñones; de suerte, que se puede suponer que todas las fuerzas se hallan en este plano medio. Examinemos primeramente la polea fija (fig.ª 57) llamemos T la tension de la cuerda sobre que obra la potencia; T' la que corresponde á la resistencia; φ el angulo formado por estas tensiones de una y otra polea de la recta que une su punto de concurso A con el centro C de la polea; m el peso de esta polea que es siempre muy pequeño respecto á T y T'; χ el ángulo que forma la direccion de este peso con la de la recta AC prolongada; conservando además las mismas denominaciones y convenios que en los números 55 y 57 se tendrá, despues de haber descompuesto las fuerzas m, T y T' paralela y perpendicularmente á la direccion de AC

$$Tr = T'r + \frac{d^{u}(a+bT')}{2r}r + f''\rho\sqrt{\left((T+T')\cos\varphi + m\cos\chi\right)^2 + \left((T+T')\operatorname{sen}\varphi - m\operatorname{sen}\chi\right)^2}$$

cesacion en que $(T+T')\cos\varphi + m\cos\alpha$ es evidentemente positivo y mayor que $(T+T')\,\text{sen}\,\varphi - m\,\text{sen}\,\alpha$, que permanece superior á cero mientras que $\text{sen}\,\varphi$ no sea muy pequeño; reemplazando pues el radical por su valor aproximado á $\frac{1}{25}$ (57) y sacando en seguida el de T en T', resultará

$$T=\frac{T'r+\frac{1}{2}d^{\mu}(a+bT')+f'\rho\left[(0,96\cos\varphi-0,4\,\text{sen}\,\varphi)T'+(0,96\cos\alpha-0,4\,\text{sen}\,\alpha)m\right]}{r-f'\rho(0,96\cos\varphi+0,4\,\text{sen}\,\varphi)}$$

Si las cuerdas fuesen paralelas, es decir, si φ fuese nulo, no habría evidentemente que hacer mas que cambiar el signo de $\text{sen}\,\alpha$ en esta fórmula, atendiendo á que la cantidad $(T-T')\,\text{sen}\,\varphi - m\,\text{sen}\,\alpha$ resultará negativa; en fin, si estas cuerdas fuesen las dos verticales, en lugar del valor aproximado anterior, se tomará este

$$T=\frac{T'r+\frac{1}{2}d^{\mu}(a+bT')+f'\rho(T'+m)}{r-f'\rho}$$

que es enteramente rigoroso.

De la polea móvil.

63. En el caso de la polea móvil (fig.ª 58) será mas sencillo descomponer las tensiones T y T' segun la vertical y la horizontal, porque la diferencia de las componentes que obran en esta última direccion, deberá ser naturalmente nula y la suma de las que obran segun la vertical disminuida del peso m de la polea deberá ser precisamente igual á la carga Q sostenida por esta po-

lea y en la cual está comprendido el peso de la chapa y de las armas; siendo además α y β los ángulos formados respectivamente por T y T' con la vertical, se tendrán así las ecuaciones

$$T \operatorname{sen} \alpha - T' \operatorname{sen} \beta = 0, \quad T \cos \alpha + T' \cos \beta - m = Q$$

que servirán para determinar los ángulos α y β así como los valores de T y T', en union con la ecuacion de equilibrio de la polea alrededor de su centro C, ecuacion que resulta aquí simplemente

$$Tr = T'r + \tfrac{1}{2} d^{\mu}(a + bT') + f'\rho Q$$

atendiendo á que Q representa la resultante de las fuerzas que obran sobre el eje C.

Para sacar el valor de T y T' de estas ecuaciones, se sustituiran primeramente los que dan las dos primeras en funcion de α y de β, en la tercera, que servirá así para calcular estos angulos por medio de las condiciones geométricas que fijan la posicion del sistema; teniendo de este modo, los valores de α y β se calcularán T y T' por las ecuaciones

$$T' = \frac{T \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{(Q+m) \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$$

$$T = (Q+m)\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{(r + \frac{1}{2} d^{\mu} b)(Q+m) + (\frac{1}{2} d^{\mu} a + f'\rho Q) \cos \beta}{r(\cos \beta + \cos \alpha) + \frac{1}{2} d^{\mu} b \cos \alpha}$$

En cuanto á la relacion α y β se reduce á la siguiente

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d^{\mu} b}{r}\right) + \frac{\frac{1}{2} d^{\mu} a + f'\rho Q}{r(Q+m)}$$

que demuestra que sen β excede á sen α en una fraccion siempre muy pequeña.

En el caso en que las cuerdas sean sensiblemente verticales, se podrá sin inconveniente para la exactitud, reemplazar las tres ecuaciones anteriores por las siguientes, despreciando las potencias α y β superiores á la primera:

$$T\alpha - T'\beta = 0,\quad T + T' = Q + m;\quad Tr = T'r + \tfrac{1}{2}d'''(a + bT') + f'\rho(T + T' - m)$$

que dan

$$T = \frac{(r + \frac{1}{2}d'''b)(Q + m) + \frac{1}{2}d'''a + f'\rho Q}{2r + \frac{1}{2}d'''b};\quad T' = \frac{r(Q + m) - \frac{1}{2}d'''a - f'\rho Q}{2r + \frac{1}{2}d'''b}$$

Torno ó cábria de Lombard.

64. Los cálculos que preceden son inmediatamente aplicables á la cábria de Lombard (fig.ª 89) que los ingleses atribuyen á los Chinos, y que ha sido descrita por Mr Navier en el tomo primero de la Arquitectura hidráulica de Belidor nueva edicion; nota 61 pag.ª 200.

Conservando aqui las mismas denominaciones que en el artículo anterior, en cuanto á lo que concierne á la polea móvil, y suponiendo que la potencia P obra para elevar la carga Q en la circunferencia de una rueda de radio R, bajo un ángulo con la vertical, medido por α: llamando ademas M el peso del torno comprendiendo el de la rueda y de las cuerdas, cuyo centro de gravedad general lo supondremos sobre el eje de este torno:

ρ' los rádios iguales de los muñones A y A',

R el rádio del tambor sobre el que se arrolla la

cuerda cuya tension es T,

r' el del tambor que corresponde á la tension T'

$\frac{d^u(a+bT)}{2R'}$ la rigidez producida al arrollarse la primera cuerda: f_1 el valor de $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ para los muñones A y A';

Observamos además que Q es la resultante de las tensiones T y T' que obran para comprimir verticalmente los muñones; que, en fin, estas tensiones pueden considerarse como sensiblemente verticales, suponiendo que la polea C haya recibido dimensiones convenientes, se tendrá primeramente para calcular T y T' (63)

$$T = \frac{(r+\frac{1}{2}d^u b)(Q+m)+\frac{1}{2}d^u a+f'PQ}{2r+\frac{1}{2}d^u b}$$

$$T' = \frac{r(Q+m)-\frac{1}{2}d^u a-f'PQ}{2r+\frac{1}{2}d^u b}$$

despues, observando que aqui todas las fuerzas obran para comprimir los muñones en el mismo sentido y que la componente horizontal $P\,\mathrm{sen}\,\alpha$ es evidentemente una cantidad muy pequeña respecto de $M+Q+m+P\cos\alpha$, y cuyo cuadrado puede despreciarse debajo del radical que expresa la presion total de los muñones (59), se tendrá igualmente para calcular P,

$$P.R = TR' + \frac{d^u(a+bT)}{2R'}R' - T'r' + f_1 P(M+Q+m+P\cos\alpha);$$

de donde se sacará inmediatamente el valor de P despues de haber sustituido los anteriores de T y T'.

En el caso en que no hubiese resistencias pasivas se tendria evidentemente

$$T = T' = \frac{Q+m}{2}, \quad P = (Q+m)\left(\frac{R'-r'}{2R}\right)$$

lo que demuestra que se puede disminuir á voluntad el esfuerzo de P, disminuyendo convenientemente la diferencia $R'-r'$ de los radios de los tambores sobre que se arrollan las cuerdas que sostienen la polea móvil.

Si se tratase además de calcular para una revolucion entera del arbol del torno la cantidad de trabajo que tendria que desarrollar la potencia P, no quedaria mas que multiplicar su valor por la circunferencia $2\pi R$ que describe su punto de aplicacion en su misma direccion, lo que daria para este trabajo, en el caso en que no existieren resistencias pasivas, es decir, para el efecto útil

$$(Q+m)\,\pi\,(R'-r')$$

espresion en que $\pi(R'-r')$ representa evidentemente la altura á que se ha elevado la carga $Q+m$ durante esta misma revolucion del arbol.

Cabrestantes, andeles ó tornos de ejes verticales.

65. Las soluciones y ecuaciones relativas al torno de eje horizontal convienen igualmente á los tornos y á los sistemas de rotacion cualesquiera, de ejes verticales; no se trata mas que de hacer $M=0$ en estas ecuaciones y añadir á su segundo miem-

bro un término de la forma (42) $\frac{2}{3} f M \rho$, para tener cuenta del rozamiento sobre la cabeza del gorron ó eje inferior que sostiene la carga M.

Supongamos, por ejemplo, que se trate del cabrestante ordinario (fig.ª 60) solicitado por una potencia P, que obra perpendicularmente al extremo de una palanca de longitud R, para vencer la resistencia Q aplicada á la cuerda horizontal que se arrolla alrededor del arbol vertical del torno; llamemos tambien α el angulo formado en una posicion cualquiera del sistema por la potencia P con la direccion invariable de Q y conservando además todas las denominaciones y convenios del núm.º 55 se observará que aquí el gorron A' es generalmente mas fuerte que el gorron inferior A; que ademas, p debe cambiar de signo; que, en fin, las componentes de Q que obran sobre estos gorrones, preponderan sobre las que provienen de la descomposicion de P; se tendrá, pues, para resolver la cuestion en el caso del cabrestante ordinario;

$$PR = Qr + \frac{d^{u}(a+bQ)r}{2r} + f_1 \rho N + f_1' \rho' N' + \frac{2}{3} f M \rho,$$

$$N = \frac{1}{l}\sqrt{(Qq + Pp\cos\alpha)^2 + P^2 p^2 \operatorname{sen}^2\alpha} = 0{,}96\, Q\frac{q}{l} + P\frac{p}{l}(0{,}96\cos\alpha + 0{,}4\operatorname{sen}\alpha)$$

$$N' = \frac{1}{l}\sqrt{\left[Q(l-q) - P(l+p)\cos\alpha\right]^2 + P^2(l+p)^2\operatorname{sen}^2\alpha} = \ldots$$

$$\ldots 0{,}96\, Q\frac{(l-q)}{l} - P\frac{(l+p)}{l}(0{,}96\cos\alpha - 0{,}4\operatorname{sen}\alpha)$$

valores en que sen α deberá siempre tomarse (57) prescindiendo del signo, pero nó cos α.

Cuando P represente la suma de muchas potencias iguales y simétricamente distribuidas al rededor del eje A A', lo que sucede en el cabrestante manejado por hombres, las componentes de estas potencias que obran sobre los gorrones, se destruyen entre sí recíprocamente y se tiene simplemente entonces

$$PR = Qr + \frac{d^{u}(a+bQ)}{2r}\,r + f_{,}\rho Q\frac{q}{l} + f_{,}'\rho' Q\frac{(l-q)}{l} + \frac{2}{3} f M \rho;$$

de donde se saca inmediatamente el valor de P.

En fin, en el caso en que P obre de un modo cualquiera pero que $f_{,}' = f_{,}$, $\rho' = \rho$, la ecuación de equilibrio resultaría

$$PR = Qr\ \frac{d^{u}(a+bQ)}{2r}\,r + f_{,}\rho\left[0,96\,Q - 0,96\cos\alpha\, P + 0,4\left(\frac{l+2p}{l}\right)P\,\text{sen}\,\alpha\right] + \cdots$$
$$\cdots \frac{2}{3} f M \rho$$

y daría para P el valor

$$P = \frac{Qr + \frac{1}{2} d^{u}(a+bQ) + 0,96 f_{,}\rho Q + \frac{2}{3} f M \rho}{R + f_{,}\rho\left[0,96\cos\alpha - 0,4\left(\frac{l+2p}{l}\right)\text{sen}\,\alpha\right]}$$

fórmula aplicable á todas las posiciones de las barras del andel, siempre que, atribuyendo á $\cos\alpha$ el signo que le conviene, no se tomen sino los valores absolutos de $\text{sen}\,\alpha$.

Tornos ó árboles giratorios conducidos por cuerdas ó correas sin fin.

Ecuaciones y datos fundamentales de la cuestion:

66. Para ofrecer un ejemplo de la manera de calcular las resistencias procedentes de la ten-

sion y de la rigidez de las cuerdas en semejante sistema, consideraremos los dos árboles de ruedas A y A' (fig.ª 61) horizontales, paralelos y que se comunican el movimiento por medio de una cuerda sin fin BB' DD', que pasa sobre dos tambores de radios diferentes R y R'. Supondremos que el torno A está solicitado por una resistencia vertical Q, que obra en la circunferencia de una rueda de radio r y que debe suponerse aquí que comprende todas las resistencias pasivas tales como la rigidez de las cuerdas &, que se desarollan en su punto de aplicacion. La dificultad se reduce evidentemente á determinar las tensiones separadas de las dos ramas BB', DD' de la cuerda sin fin, tensiones cuya diferencia espresa el valor de la potencia que debe vencer á la vez la resistencia activa Q, la rigidez de la cuerda al arrollarse en D y los rozamientos sobre los muñones A que nacen, tanto del peso y de la carga Q del torno, como de la resultante de las tensiones de que se trata. Llamemos

T la tension que obra del lado de la potencia con el radio R,

T' la que obra del lado de la resistencia con el mismo radio;

φ el ángulo formado por estas tensiones con la horizontal A A',

ρ el radio de los muñones del arbol A,

f_1 el valor de $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ que les corresponde

M el peso del torno y de un armazon que suponda mos obra sobre el eje.

$\frac{d^{\mu}(a+bT')}{2R}$ la rigidez debida á la tension T'; observaremos además que aquí las componentes horizontales y verticales de las fuerzas sobre los muñones, obran para comprimirlos á ambos en el mismo sentido; y se podrá (58) suponerlas todas trasportadas al mismo punto del eje, de suerte que se tendrá para calcular T y T'

$$(T-T')R = Qr + \frac{d^{\mu}(a+bT')}{2R}R + f_1 \rho N$$

ecuacion en la que se tomará

$$N = \sqrt{\left[M+Q-(T-T')\operatorname{sen}\varphi\right]^2 + (T+T')^2\cos^2\varphi} =$$

$$0{,}96\left[M+Q-(T-T')\operatorname{sen}\varphi\right] + 0{,}4\,(T+T')\cos\varphi$$

si la suma de las componentes verticales excede á la de las horizontales asi como sucede en casi todas las aplicaciones; y si además las fuerzas Q, T y T' obran en el intervalo mismo que separa los muñones; cuando esta última circunstancia no tiene lugar, es preciso descomponer separadamente cada una de estas fuerzas sobre los apoyos y proceder como se ha hecho (65) con el cabrestante, ó en la nota del numᵒ 59.

Como la ecuacion anterior no basta para determinar T y T', se observará que la cuerda ó correa sin fin que conduce á los tambores, posee

una tension natural ó propia, independiente de la accion de las fuerzas aplicadas á las dos ruedas y cuya intensidad depende únicamente de la voluntad del constructor; y es la que se verifica en el instante en que el sistema está en reposo y antes de que se hayan aplicado la potencia y la resistencia. Si esta tension primitiva, igual para dos ramas que designaremos por T_1 fuese conocida, seria facil determinar los valores de T y T' por medio de la ecuacion anterior porque desde que la potencia principia á obrar para vencer la resistencia Q, la tension aumenta en la rama superior $B\ B'$ precisamente en cantidades iguales á las en que disminuye en la otra rama $D.\ D'$, en razon á que los alargamientos y los acortamientos de estas dos ramas, supuestas ya fuertemente tensas en virtud de T_1 deben ser iguales por sí mismas por conservar las distancias $B\ B'$ y $D\ D'$ magnitudes invariables. Se tiene, pues, para una posicion cualquiera del sistema en la que la tension de $B\ B'$ haya llegado á ser T, y la de $D\ D'$, T';

$$T + T' = 2\,T_1$$

relacion que, combinada con la ecuacion de equilibrio anterior, dará inmediatamente T y T' en funcion de T_1 y de Q.

Condicion por cuyo medio se puede determinar la tension propia de la correa sin fin.

67. La tension T, dada primitivamente á la cuerda, es necesaria para impedir que esta cuerda resbale (21 y 22.) bajo la accion de la resistencia Q en las posiciones mas desfavorables de los tambores, es decir, en las que el valor de T−T' sea el máximo. En efecto, considerando el sistema en esta posicion (que hay que determinar en cada caso en que la intensidad de las fuerzas fuese susceptible de variar), se tendrán entre T, T' y T, las mismas relaciones que anteriormente, y además, para que el resbalamiento no tenga lugar

$$T = T'e^{\frac{fS}{R}}$$

relacion en que e, f, S y R tienen las significaciones indicadas en el numero 21 y que servirá en union con las dos primeras para determinar el menor valor que es preciso dar á T, para impedir el resbalamiento, valor que será preciso aumentar alguna cosa, por ejemplo, en $\frac{1}{10}$ ó $\frac{1}{5}$ segun los casos, para prevenir el inconveniente de los sacudimientos y accidentes cualesquiera que puedan aumentar momentáneamente las resistencias ó aflojar las correas ó cuerda conductriz.

Esta última circunstancia se presenta ge-

neralmente para las tiras de cuero en los tiempos húmedos; y para las cuerdas de cáñamo en los tiempos secos; pero tiene lugar principalmente en los primeros dias que suceden á su instalacion sobre las poleas y tambores; asi las personas encargadas de la direccion de máquinas de esta especie se ven precisadas muchas veces á estender frecuentemente estas cuerdas ó correas por los medios que se indicarán en la siguiente seccion, de los cuales, el mejor, sin duda alguna, consiste en el empleo de poleas ó rodillos de presion como el representado en la figura 62 que permite graduar voluntariamente la tension hasta el punto de que no haya resbalamiento.

Pero las mas veces y á fin de prevenir eventualidades de toda especie que puedan ocurrir, se dá á las correas un esceso de tension tal, que los rozamientos que resultan sobre los muñones de los árboles, hacen perder á este medio de comunicacion del movimiento, todas las ventajas que podian esperarse de él; esto sucede principalmente en las maquinas de acciones ó de movimientos alternativos, y que estan desprovistas de un volante capaz de mantener la constancia de la velocidad de los tambores que llevan las correas.

Modo de calcular esta tension en los diferentes casos

68. En el caso de una máquina ya construida, y marchando uniformemente con correas y poleas de tension, se podrá hacer uso de las relaciones de los números 62 y 63 para calcular directamente los esfuerzos que experimentan las correas, siempre que la presion de la polea esté dada ó pueda determinarse á priori; porque este esfuerzo es, en todo caso, igual y directamente contrario á la resultante de las tensiones correspondientes. Pero si no existe polea de tension, será preciso recurrir á la experiencia para determinar T; por ejemplo, habiendo quitado al torno A' (fig.ª 61) toda libertad de moverse, suprimido Q, así como las piezas por cuyo intermedio obra esta fuerza; se aplicará al extremo de una palanca horizontal suficientemente larga y sólidamente unida á la rueda A, un contrapeso exactamente capaz de hacer deslizar al tambor bajo la correa en sentido contrario á su movimiento natural; llamando Q_1 este contrapeso, r_1 su brazo de palanca y siempre T, T' las tensiones correspondientes de las ramas BB' y DD', se tendrá evidentemente (66 y 67)

$$Q_1 r_1 = (T-T')R + f_1 \rho \times 0,96\left[M + Q_1 - (T-T')\,\mathrm{sen}\,\varphi\right] + f_1 \rho\, 0,4\,(T+T')\cos\varphi$$

$$T = e^{\frac{fS}{R}} T', \; T + T' = 2T_1$$

Para sacar de estas ecuaciones el valor de T_1 se pondrá

$$T + T' = (1 + e^{\frac{fS}{R}}) T' = KT', \quad T - T' = (e^{\frac{fS}{R}} - 1) T' = K'T';$$

sustituyendo en la primera de las ecuaciones de que se trata, dará inmediatamente T' y por consiguiente:

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T') = \frac{1}{2} KT' = \frac{1}{2} K \frac{Q r_1 - 0{,}96 f.P(M + Q)}{K'R - fP(0{,}96 K' \operatorname{sen} \varphi - 0{,}4 K \cos \varphi)}$$

(a) Si la correa resbalase sobre el tambor A' en vez de hacerlo sobre el A, la solucion variaria porque el valor $T' e^{\frac{fS}{R}}$ seria distinto, puesto que la relacion $\frac{S}{R}$ seria ahora $\frac{S'}{R'}$ que es diferente de la anterior porque el arco abrazado por la cuerda de la polea A' es el de la izquierda, y en la polea A es el de la derecha.

Generalmente no se tendrá ningun medio de apreciar la tension propia T_1 de las correas sin fin, y entonces convendrá proceder como se ha prescrito anteriormente (66 y 67) para calcular al menos aproximadamente su valor.

Poniendo aun aquí:

$$T + T' = (1 + e^{\frac{fS}{R}}) T' = KT', \quad T - T' = (e^{\frac{fS}{R}} - 1) T' = K'T'$$

y sustituyendo estos valores de $T + T'$ y de $T - T'$ en las ecuaciones del número 66, se deducirá primeramente T'; despues

$$T_1 = \frac{1}{2} K \frac{Qr + \frac{1}{2} d'' a + 0{,}96 f_1 \rho (M+Q)}{K'R - \frac{1}{2} d'' b + f_1 \rho (0{,}96 K' \operatorname{sen} \varphi - 0{,}4 K \cos \varphi)}$$

cuyo valor, conforme á lo que se ha propuesto en el núm.º 67 deberá tomarse para la posicion mas desfavorable del sistema que corresponde aquí al máximo de $Qr + 0{,}96 f_1 \rho Q$ y además aumentarle en $\frac{1}{10}$ ó $\frac{1}{5}$ segun que el movimiento de la máquina sea mas ó menos regular &.

Solucion definitiva de la cuestion.

69 Habiendo obtenido por uno ú otro procedimiento de los que acabamos de esponer, el valor verdadero ó aproximado de T_1 se procederá al cálculo de las tensiones T y T' relativas á una posicion cualquiera y dada del sistema; eliminando sucesivamente estas tensiones entre la ecuacion de equilibrio del núm.º 66 y la relacion

$$T + T' = 2T_1 .$$

Sustituyendo, por ejemplo el valor $2T_1 - T'$ de T en la ecuacion de que se trata, se sacará

$$T' = \frac{T_1 \left(R - f_1 \rho (0{,}96 \operatorname{sen} \varphi + 0{,}4 \cos \varphi)\right) - \frac{d'' a}{4} - \frac{0{,}96 f_1 \rho (M+Q) - Qr}{2}}{R - 0{,}96 f_1 \rho \operatorname{sen} \varphi + \frac{d'' b}{4}}$$

y por consiguiente

$$T = \frac{T' \left[R - f_1 \rho (0{,}96 \operatorname{sen} \varphi + 0{,}4 \cos \varphi) + \frac{1}{2} d'' b\right] + \frac{d'' a}{4} + 0{,}96 f_1 \rho \left(\frac{M+Q}{2}\right) + \frac{Qr}{2}}{R - 0{,}96 f_1 \rho \operatorname{sen} \varphi + \frac{d'' b}{4}}$$

Como el termino $(T - T') \operatorname{sen} \varphi$ que entra en la espresion de N (65) es generalmente muy peque-

no respecto de los demás, se podrá sin inconveniente para la exactitud y para la simplificacion de los calculos, reemplazarle por su valor aproximado $\frac{Qr\,sen\,\varphi}{R}$ relativo á la hipótesis en que no existen resistencias pasivas; lo que dará inmediatamente

$$N = 0{,}96\left(M + Q + \frac{T}{R}\,Q\,sen\,\varphi\right) + 0{,}8\,T, \cos\varphi$$

y permitirá así calcular á priori, el valor del término $fN\rho$ que en la ecuacion de equilibrio representa el momento del rozamiento desarrollado entre los muñones del arbol A que se considera.

Una vez calculados estos términos, no presentará absolutamente ninguna dificultad todo lo relativo al torno A' al que está aplicada directamente la potencia P; porque se tendrá para calcularlo una ecuacion de la forma

$$PR'' = (T-T')R + \frac{d''(a+bT)}{2R'}R + f_1''\rho\sqrt{(M' + (T-T')\,sen\,\varphi + P\cos\alpha)^2 + ((T+T')\cos\varphi - P\,sen\,\alpha)^2}$$

en la que será todo conocido excepto P que se deducirá inmediatamente de ella por los métodos ya muchas veces citados.

En las aplicaciones de estas diferentes soluciones á cada caso particular se podrá además observar; 1.º Que si las cuerdas BB' y DD' son paralelas ó que R = R' no habrá que hacer ningun cambio en los resultados respecto de los

coeficientes numéricos 0,96 y 0,4 (59), de suerte que bastará suponer simplemente $sen\,\varphi = 0$ y $cos\,\varphi = 1$; y 2º que si estos cordones forman entre sí un angulo cualquiera, se tendrá para calcular directamente $sen\,\varphi$ y $cos\,\varphi$ las relaciones

$$BB' = AA' \cos\varphi \qquad A'B' - AB = R' - R = AA' \operatorname{sen}\varphi$$

en las que BB' y AA' estan dadas á priori.

Polipastos ó tróculas.

Sistemas de poleas iguales y de cuerdas sensiblemente paralelas.

70. Las consideraciones anteriores ponen en estado de tener en cuenta el rozamiento y la rigidez de las cuerdas en todas las máquinas, compuestas, tales como las tróculas, las cabrias, las gruas &c. en que entran poleas y tambores puestos en accion por estas cuerdas. Vamos á presentar algunos ejemplos.

Consideremos primeramente el polipasto (fig.ª 63) compuesto de dos tróculas, ó sistemas, de poleas iguales, montadas sobre dos ejes separados, sostenidas por chapas ó armas en que la una está unida á un punto fijo, y la otra sostiene una carga ó esfuerzo cualquiera.

Supondremos paralelas las diferentes cuerdas ó ramales de las poleas y despreciaremos su peso asi como el de las poleas que en

los casos mas ordinarios ejercen poca influencia.

Segun estas hipótesis y conservando las mismas denominaciones que en los números 62 y 63, se tendrá para espresar las condiciones de equilibrio de una polea cualquiera perteneciente á una ú otra chapa, la ecuacion

$$Tr = T'r + \frac{1}{2} d^{\mu}(a+bT') + f'\rho(T+T')\text{; de donde}$$

$$T = T' \frac{r+f'\rho+\frac{1}{2} d^{\mu}b+\frac{1}{2} d^{\mu}a}{r-f'\rho},$$

fórmula en que se hará para abreviar

$$\frac{r+f'\rho+\frac{1}{2} d^{\mu}b}{r-f'\rho} = \beta \ , \quad \frac{\frac{1}{2} d^{\mu}a}{r-f'\rho} = \alpha$$

lo que dá para una polea cualquiera la ecuacion

$$T = \alpha + \beta T'$$

en la que α y β son constantes.

Esto supuesto, llamando Q la carga que sufre la chapa inferior del polipasto comprendiendo su armazon;

$t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots t_n, t_{n+1}$ las tensiones de los ramales sucesivos suponiendo que el primero está unido á la chapa superior ó fija, y el último solicitado directamente por la potencia y perteneciendo á la última de las poleas superiores, se tendrá observando que la carga Q se halla á la vez sostenida por todos los ramales escepto este

$$t_1 + t_2 + t_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + t_n = Q$$

La ecuacion anterior dá además para las poleas sucesivas

$$t_2 = \alpha + \beta t_1 \ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha \frac{(1-\beta)}{(1-\beta)} + \beta t_1$$

$$t_3 = \alpha + b t_2 = \alpha + \alpha b + b^2 t_1 = \alpha(1+b) + b^2 t_1 \dots = \alpha \frac{1-b^2}{1-b} + b^2 t_1$$

$$t_4 = \alpha + b t_3 = \alpha + \alpha b + \alpha b^2 + b^3 t_1 = \alpha(1+b+b^2) + b^3 t_1 = \alpha \frac{1-b^3}{1-b} + b^3 t_1$$

....

$$t_n = \alpha + b t_{n-1} = \alpha(1+b+b^2 \dots\dots b^{n-2}) + b^{n-1} t_1 = \alpha \frac{1-b^{n-1}}{1-b} + b^{n-1} t_1$$

y por consiguiente

$$Q = t_1 + t_2 + t_3 \dots + t_n = \alpha \left\{ \frac{n-1-b-b^2 \dots\dots - b^{n-1}}{1-b} \right\} + (1+b+b^2 \dots\dots + b^{n-1}) t_1$$

ó $Q = \alpha \left\{ \frac{n}{1-b} - \frac{1-b^n}{(1-b)^2} \right\} + \frac{1-b^n}{1-b} t_1$; de donde $t_1 = Q \frac{1-b}{1-b^n} - \alpha \left(\frac{n}{1-b^n} - \frac{1}{1-b} \right)$

Luego, en fin se tendrá para calcular t_n y t_{n+1} las fórmulas

$$t_n = \alpha \frac{1-b^{n-1}}{1-b} + b^{n-1} t_1 = \alpha \left(\frac{n b^{n-1}}{b^n - 1} - \frac{1}{b-1} \right) + \frac{(b-1) b^{n-1}}{b^n - 1} Q$$

$$t_{n+1} = \alpha + b t_n = \alpha \left(\frac{n b^n}{b^n - 1} - \frac{1}{b-1} \right) + \frac{(b-1) b^n}{b^{n-1}} Q$$

sirviendo la primera para el caso en que la cuerda sobre que obra la potencia termine directamente en una polea de la chapa móvil.

El mismo análisis sería igualmente aplicable á toda combinacion de poleas iguales cuyos ramales formaren consecutivamente los mismos ángulos, ya entre sí, ya con la vertical; lo que se presenta algunas veces en las máquinas destinadas á elevar cargas. Es evidente, en efecto segun los números 62 y 63 que se tendrá sensiblemente para las poleas móviles, así como para las poleas fijas, y conservando las notaciones del primero de estos números

$$T r = T' r + \frac{1}{2} d^{\omega} (a + b T') + f' \rho \sqrt{(T+T')^2 \cos^2 \varphi + (T-T')^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \, ;$$

de donde se saca con un grado de aproximacion suficiente

$$T = \frac{\{r+\frac{1}{2}d^{\mu}b+f'\rho(0,96\cos\varphi-0,4\operatorname{sen}\varphi)\}T'+\frac{1}{2}d^{\mu}a}{r-f'\rho(0,96\cos\varphi+0,4\operatorname{sen}\varphi)}$$

espresion lineal y en que no hay mas variables por hipótesis que T y T'.

Aplicacion numérica al polipasto de los Pontoneros.

71. El polipasto empleado en el servicio de los puentes, (figª. 64) está compuesto de dos sistemas de cuatro poleas iguales de cobre cuyo radio comun r es igual á $0,^{m}0593$, medidos á partir del medio de la cuerda, la cual tiene por diámetro $d=0,018$. Estas poleas están atravesadas de un agujero cuyo radio $\rho=0,^{m}0.105$ (38); giran sin engrasado alguno alrededor de un pasador de hierro; de suerte que se tiene aquí segun las esperiencias de Coulomb (11)

$f=0,155$ y por consiguiente $f'=\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}=0,153$ de donde se saca $r+f'\rho=0,^{m}0,6093$, $r+f'\rho=0,^{m}05767$.

La tabla del número 18 dá para una cuerda de diámetro $d'=0,^{m}02$, arrollada sobre un tambor de 1^{m} de diámetro

$$d'^{\mu}a=0,^{K}22246\,,\qquad d'^{\mu}b=0,^{K}00974$$

siendo aquí el esponente $\mu=1,75$ proximamente lo que conviene á las cuerdas casi nuevas. Suponiendo pues que las del polipasto actual estén en el mismo estado, se tendrá segun el número 19

$$d^{\mu}a=d'^{\mu}a\left(\frac{d}{d'}\right)^{\mu}=0,22246\left(\frac{9}{10}\right)^{1,75}=0,184997\ \ldots\ldots 0,185$$

$$d''b = d'''b\left(\frac{d}{d'}\right)^{u} = 0{,}00874\left(\frac{9}{10}\right)^{1{,}75} = 0{,}0080997 \ldots\ldots 0{,}0081$$

lo que dá;

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}d''a}{T-f'\rho} = 1{,}6039\,,\quad b = \frac{T+f'\rho+\frac{1}{2}d''b}{T-f'\rho} = 1{,}1267$$

Sustituyendo estos valores en la formula

$$t_{n+1} = \alpha\left(\frac{n\,b^{n}}{b^{n}-1} - \frac{1}{b-1}\right) + \frac{(b-1)\,b^{n}}{b^{n}-1}\,Q$$

observando que aquí $n = 8$ y por consiguiente $b^{n} = 2{,}596$, $\frac{b^{n}}{b^{n}-1} = 1{,}6265$, resultará $t_{n+1} = P = 8^{K}213 + 0{,}2061\,Q$: si no hubiese resistencias pasivas se tendria evidentemente

$$t_{n+1} = \frac{1}{8}\,Q = 0{,}125\,Q\,;\ (a)$$

estas resistencias exigen, pues, de parte de la potencia un aumento de esfuerzo rendido por

$$8{,}^{K}213 + 0{,}081\,Q$$

y cuya relacion á la carga Q aumenta indefinidamente á medida que esta carga disminuye; circunstancia que consiste en la parte constante $d''a$ (17) de la rigidez de las cuerdas.

Suponiendo, por ejemplo, que la carga que

(a) Este valor se hubiera podido obtener tambien de la formula general que dá el valor de t_{n+1}, haciendo en ella $\alpha = 0$, y $b = 1$ que corresponden al caso de no haber resistencias pasivas. Dicha fórmula se reducirá introduciendo primero el valor $\alpha = 0$, á

$$t_{n+1} = \frac{(b-1)\,b^{n}}{b^{n}-1}\,Q$$

aunque el valor $b = 1$ hace tomar á esta espresion la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, es facil reconocer que esto proviene del factor $b-1$ comun al numerador y denominador; dividiendo por él resulta

$$t_{n+1} = \frac{b^{n}}{\frac{b^{n}-1}{b-1}}\,Q = \frac{b^{n}}{1+b+b^{2}+\ldots b^{n-1}}\,Q$$

y cuando $n = 8$ y $b = 1$ se convertirá en

$$t_{n+1} = \frac{1}{8}\,Q = 0{,}125\,Q\,.$$

hay que elevar, sea una pieza de 24 con peso de 2800 Kilog.s, la potencia deberá desarrollar próximamente un esfuerzo de $585,^{K}29$ en lugar de $0,125\,Q = 305$ Kil solamente que tendria que vencer si no hubiera resistencias pasivas; estas resistencias absorven, pues, por sí solas los $\frac{235,29}{585,29} = 0,402$ del esfuerzo ó del trabajo motor; ó lo que es lo mismo, el efecto útil está reducido á los $\frac{350}{585,29} = 0,598$ de la cantidad de trabajo gastada; siendo aquí uno y otra evidentemente proporcionales á los esfuerzos que les corresponden y referidas al mismo punto de aplicacion, ó al mismo camino recorrido.

Tróculas de poleas desiguales y de cuerdas paralelas; aplicacion numérica y esperiencia relativa á este polipasto.

72. La figura 65 representa un sistema de tróculas que se emplea muchas veces en las construcciones para elevar materiales á la parte superior de los edificios y en que los ramales son aun sensiblemente paralelos; pero en que las poleas son desiguales para cada trócula y montadas sobre ejes diferentes unidos por la misma chapa; los valores de α y de 6 (69) cambiando así de una polea á la siguiente, se hace preciso calcular sucesivamente las tensiones t_2 t_3 ...... t_n t_{n+1} que pertenecen á las poleas consecutivas, en funcion de la tension t_1 del primer cordon; de suerte que se tiene la se-

rie de ecuaciones

$t_2 = \alpha + b t_1$, $t_3 = \alpha_1 + b_1 t_1$, $t_4 = \alpha_2 + b_2 t_1 \ldots t_n = \alpha_{n-2} + b_{n-2} t_1$, $t_{n+1} = \alpha_{n-1} + b_{n-1} t_1$,
de las cuales se sacará el valor de t_1 despues el de t_n y de t_{n+1}, poniendo tambien la ecuacion

$$Q = t_1 + t_2 + t_3 \ldots\ldots + t_n = \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 \ldots\ldots + \alpha_{n-2} + (1 + b + b_1 + b_2 \ldots + b_{n-2}) t_1$$

Estos cálculos se simplifican en la mayor parte de los casos, atendiendo á que las poleas simétricamente colocadas en las dos chapas reciben ordinariamente radios iguales así como sus ejes.

A fin de ofrecer una aplicacion numérica, supondremos para las dos primeras poleas abrazadas por las cuerdas y cuyas tensiones son t_1 t_2 y t_3

$r = 0^m,043$ $\rho = 0^m,0075$, $f' = 0,125$; $d = 0^m,016$; $d''a = 0,0635$, $d''b = 0,00552$
de donde sustituyendo en las relaciones del num.º 69

$\alpha = 0^K,756$ $b = 1,1119$ $t_2 = 0,756 + 1,1119\, t_2$ $t_3 = \alpha(1+b) + b^2 t_1 = \ldots$
$\ldots\, 1,597 + 1,2363\, t_1$;

Supongamos igualmente para la tercera polea $r = 0^m,056$ $\rho = 0^m,0075$ $f' = 0,125$ $d''a = 0,0635$ $d''b = 0,00552$ y resultará

$\alpha = 0^K,577$ $b = 1,0854$ $t_4 = 0,577 + 1,0854\, t_3 = 2^K,310 + 1,3419\, t_1$.

Por consiguiente, si el ramal t_4 es el que solicita directamente la potencia, se tendrá

$$Q = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 4^K,663 + 4,690\, t_1 : \text{ de donde}$$

$$t_4 = 1^K,005 + 0,2861\, Q$$

en lugar de $t_4 = 0,25\, Q$ que se obtendria si no hubiese resistencias pasivas.

Si se tiene, por ejemplo, $Q = 532^K$; t_4 , teniendo

en cuenta á las resistencias de que se trata, deberá ser igual á $1,^{k}005 + 152,^{k}205 = 153,^{k}21$ mientras que sería solamente 133^{k} en el caso en que no existiesen.

Estos cálculos se refieren especialmente á un polipasto empleado por los bateleros de Moselle; y que Mr Morin ha tenido ocasion de someter directamente á la esperiencia con motivo de sus investigaciones sobre el rozamiento; el valor que ha hallado para t_4 no escede al anterior dado por el calculo sino en $6,^{k}80$, diferencia que, por otra parte, se esplica, pues que hemos despreciado la influencia del peso de la cuerda y de las poleas, y que con objeto de abreviar, hemos supuesto la rigidez de esta cuerda que tiene $0,^{m}016$ de diámetro, simplemente igual á la de la cuerda de $0,^{m}014$ de diámetro que se halla inserta en la tabla del nº 18.

Aplicacion relativa á la cabria compuesta de muchos ramales

Cálculo de la cabria de artilleria

73. Tomando, por ejemplo, la cabria de artilleria (figª 66) y conservando para las poleas de las trócolas las denominaciones del nº 70, se observará que el ramal de la potencia, cuya tension es t_{n+1}, no es aqui paralelo á los demás, pues que va á arrollarse al torno de la cabria, de suerte que

será preciso considerar aparte el equilibrio que existe entre t_{n+1} y t_n sobre la ultima polea superior.

Esto supuesto, se tendrá primeramente para calcular la tension t_n (72)

$$t_n = \alpha\left(\frac{n\,6^{n-1}}{6^n-1} - \frac{1}{6-1}\right) + \frac{(6-1)\,6^{n-1}}{6^n-1}\,Q$$

despues (62) para calcular la t_{n+1} del ultimo ramal que forma el angulo φ con la vertical

$$t_{n+1}r = t_n r + \frac{d^{\mu}(a+bt_n)}{2r}\,r + f'\rho\sqrt{(t_n+t_{n+1}\cos\varphi)^2 + t_{n+1}^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}$$

en cuya ecuacion poniendo

$$\sqrt{(t_n+t_{n+1}\cos\varphi)^2\, t_{n+1}^2\,\mathrm{sen}^2\varphi} = 0{,}986(t_n+t_{n+1}\cos\varphi) + 0{,}233\,t_{n+1}\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

valor que en este caso es exacto en $\frac{1}{71}$ en razon á que $t_n + t_{n+1}\cos\varphi$ excede por lo menos al duplo de $t_{n+1}\,\mathrm{sen}\,\varphi$ resulta

$$t_{n+1} = \frac{t_n(r+\frac{1}{2}d^{\mu}b+0{,}986f'\rho)+\frac{1}{2}d^{\mu}a}{r-f'\rho(0{,}986\cos\varphi+0{,}233\,\mathrm{sen}\,\varphi)} = \frac{t_n(r+\frac{1}{2}d^{\mu}b+0{,}986f'\rho)+\frac{1}{2}d^{\mu}a}{r-f'\rho}$$

puesto que siendo aquí $2\,\mathrm{sen}\,\varphi$ siempre mas pequeño que $\cos\varphi$, la cantidad $0{,}986\cos\varphi + 0{,}233\,\mathrm{sen}\,\varphi$, que entra en el denominador es el valor de $\cos^2\varphi+\mathrm{sen}^2\varphi = 1$ aproximado á $\frac{1}{71}$

La tension t_{n+1} de la cuerda que solicita el torno de la cabria queda, pues, conocida y habrá que proceder regularmente al cálculo de la potencia que es necesario aplicar al torno pª vencer todas las resistencias reunidas; pero aquí ocurre la dificultad de que los hombres que manejan la cabria

no ejercen todos el mismo esfuerzo ni bajo el mismo ángulo, ni en el mismo punto de las palancas, cuya inclinacion varía además en cada instante. Es pues necesario limitarse á calcular aproximadamente el valor medio del esfuerzo ó del trabajo que tienen que desarollar sobre las palancas en cada revolucion ó en un tiempo dado, para vencer todas las resistencias reunidas, y asegurarse si son realmente capaces de este esfuerzo ó de este trabajo.

Al efecto, se observará que la accion de los hombres sobre la máquina, puede siempre considerarse descompuesta en otras dos, una perpendicular á las palancas, y es la que produce el movimiento, y otra dirigida segun estas mismas palancas, la cual produce presion sobre los muñones del torno contra los cojinetes, y puede despreciarse sin error sensible, porque solo influye en el rozamiento que es bastante pequeño en este torno.

Llamando, pues, P á la primera, α el ángulo que forma con la vertical, R su distancia media al eje que se puede suponer igual á $\frac{3}{4}$ ó $\frac{2}{3}$ próximamente de la longitud de las palancas, se tendrá para determinar P, atendiendo (58) que aquí las componentes de t_{n+1} que obran sobre los muñones, predominan necesariamente sobre las que provienen de M

y de P,

$$PR = t_{n+1} r' + \frac{1}{2} d''(a + b t_{n+1}) + f_1' \rho' \sqrt{(t_{n+1} \cos\varphi - M - P\cos\alpha)^2 + (t_{n+1} \operatorname{sen}\varphi - P \operatorname{sen}\alpha)^2}$$

en cuya ecuacion tienen la significacion ya sabida las letras r', f_1', ρ' y M. Se puede resolver de la manera ordinaria, reemplazando el radical por su valor aproximado

$$(0,96 \cos\varphi + 0,4 \operatorname{sen}\varphi)\, t_{n+1} - 0,96 M - (0,96 \cos\alpha + 0,4 \operatorname{sen}\alpha) P = t_{n+1} - 0,96 M - (0,96 \cos\alpha + 0,4 \operatorname{sen}\alpha) P.$$

puesto que aquí el angulo φ es inferior á 45°, se tendrá tambien con una aproximacion de $\frac{1}{25}$ que $0,96 \cos\varphi + 0,4 \operatorname{sen}\varphi = 1$. Pero como el angulo α es susceptible de variar desde 0° á 90° proximamente y hemos despreciado el peso de las palancas y las componentes del esfuerzo que ejercen los hombres en el sentido de su direccion, se podrá igualmente sustituir á la espresion $0,96 \cos\alpha + 0,4 \operatorname{sen}\alpha$, su mayor valor 1, que corresponde al angulo obtenido por la diferenciacion de dicha espresion que dá $0,4 \cos\alpha = 0,96 \operatorname{sen}\alpha$,

Se hallará segun esto para el esfuerzo medio

$$P = \frac{t_{n+1}(r' + \frac{1}{2} d'' b + f_1' \rho') + \frac{1}{2} d'' a - 0,96 f_1' \rho' M}{R + f_1' \rho'}$$

Rozamiento en la rosca de filetes cuadrados

Espresion del momento de las resistencias respecto al eje de la rosca.

81. Sea (figª 67) A B el eje supuesto vertical de una rosca de filetes cuadrados, destinada á elevar un peso Q por intermedio de una potencia horizontal P aplicada al estremo del brazo de palanca R, de suerte que la tuerca a b c d se supone aquí fija. Se puede siempre suponer que la carga Q esté distribuida uniformemente sobre un filete horizontal de la rosca ó de la tuerca, que llamaremos filete medio, y se halle colocada en él como sobre un plano inclinado que forma con el horizonte un angulo igual al de los planos tangentes á este filete. Llamando, pues,

r el radio del cilindro que contiene á la helice ó filete medio de que se trata,

p la fuerza horizontal tangente á este cilindro que seria capaz de vencer el peso Q y los rozamientos que de él resultan sobre la superficie del filete medio,

h la altura del paso de la rosca ó de la tuerca

$\pi = 3,1415926$ la relacion de la circunferencia del circulo al diámetro

α el angulo de inclinacion constante del filete

medio con el horizonte

f el coeficiente del rozamiento para las superficies en contacto; se tendrá segun el núm.º 23

$$P=\frac{Q\tan\alpha+f}{1-f\tan\alpha}=\frac{Qh+2\pi fr}{2\pi r-fh}$$

cuyo momento respecto al eje de la rosca es

$$pr=Qr\,\frac{\tan\alpha+f}{1-f\tan\alpha}=Qr\,\frac{h+2\pi rf}{2\pi rfh}$$

Este es el momento que será preciso introducir en la ecuacion de equilibrio (n.os 55 y siguientes), de las fuerzas que solicitan la rosca ó la tuerca en el movimiento de rotacion alrededor del eje fijo AB.

Influencia del rozamiento en la rosca y en la tuerca.

82. El valor anterior de p suele ponerse bajo la forma

$$p=Q\tan\alpha+fQ\,\frac{1+\tan^2\alpha}{1-f\tan\alpha}=Q\frac{h}{2\pi r}+fQ\,\frac{h^2+4\pi^2r^2}{2\pi r(2\pi r-fh)}$$ por consiguiente se ve que la porcion de p empleada solamente en vencer el rozamiento, tiene por espresion

$$fQ\,\frac{1+\tan^2\alpha}{1-f\tan\alpha}$$

cuyo valor crece progresivamente con $\tan\alpha$ hasta resultar infinito cuando $\tan\alpha=\frac{1}{f}$, límite, pasado el cual, no podria la potencia p ó P hacer mover á la rosca, elevandola á lo largo de los filetes de la tuerca (24)

Pareceria, segun esto, que deberia haber ventaja, en general, en disminuir el ángulo de inclinacion α de las hélices, pero se llega á una consecuencia enteramente opuesta si se considera que la relacion

$$\frac{f(1+\tang^2\alpha)}{\tang\alpha(1-f\tang\alpha)} = \frac{2f}{\sen 2\alpha - f(1-\cos 2\alpha)}$$

del término p relativo al rozamiento, con el que presenta la porcion utilizada de la potencia, disminuye constantemente desde el valor 0 de α, que le hace infinito, hasta el valor α que corresponde á $\tang 2\alpha = \frac{1}{f}$ que le hace un mínimo: lo mismo se deduce tambien directamente de la comparacion de la cantidad de trabajo utilizada á la gastada por p y cuya relacion es aquí evidentemente

$$\frac{\tang\alpha(1-f\tang\alpha)}{\tang\alpha+f} = \frac{\sen 2\alpha - f(1-\cos 2\alpha)}{\sen 2\alpha + f(1+\cos 2\alpha)} = 1 - \frac{2f}{\sen 2\alpha + f(1+\cos 2\alpha)}$$

Esta relacion cuyo máximo corresponde á $\tang 2\alpha = \frac{1}{f}$ resulta nula para el valor de α que corresponde á $\tang.\alpha = \frac{1}{f}$; es decir, para el mismo valor que hace infinita la espresion del rozamiento.

Suponiendo, por ejemplo, $f = 0,12$ lo que conviene al caso (9) en que la tuerca fuese de cobre y la rosca de hierro y las superficies untuosas, además $\tang.\alpha = \frac{1}{25}$, lo que se presenta muchas veces, principalmente en las prensas de rosca, la relacion anterior resultará 0, 249; au

el trabajo gastado por la potencia para elevar la carga Q seria mas del cuadruplo del que corresponde al efecto util. Si tang α fuese igual á $\frac{1}{4}$ la misma relacion resultaria 0,655; estos resultados ponen en evidencia la enorme influencia que ejerce el rozamiento de las roscas y de las tuercas.

Propiedades y usos diversos de las roscas.

83. Se deduce tambien de lo que se ha dicho (23 y 25) para el caso del plano inclinado, que si tang α es inferior á f, la rosca, no solamente no tenderá á descender por sí misma ó en virtud del esfuerzo que sufre, sino que exigirá para ser vencida por la potencia p que suponemos obra en sentido contrario del que obraba anteriormente, un esfuerzo medido por

$$p = Q\frac{f - \text{tang}\,\alpha}{1 + f\,\text{tang}\,\alpha} = fQ\,\frac{1 + \text{tang}^2\alpha}{1 + f\,\text{tang}\,\alpha} - Q\,\text{tang}\,\alpha$$

Este caso es precisamente el de los pernos de ensambladura que deben mantener el estado de compresion recíproca de ciertos cuerpos, despues que la potencia haya ejercido su accion sobre la rosca ó la tuerca. Se sabe que sucede todo lo contrario en las roscas de balancin para cortar, estampar ó acuñar la moneda, y que llevan filetes dobles ó triples á fin de poder dar á sus hélices medias una gran inclinacion sobre el

eje. Algunas veces sucede tambien aun para las roscas en que la relacion $\tan\alpha < f$ está satisfecha, que los sacudimientos ó vibraciones que experimentan los pernos de ensambladura, aflojan las tuercas, y para evitar este efecto, se suelen colocar dos tuercas una encima de otra ó poner directamente un obstáculo al movimiento de la tuerca por un medio fácil de imaginar.

Modo de tener en cuenta el rozamiento lateral de la rosca en el caso en que esté únicamente guiada por la tuerca.

84. Los resultados expuestos en el nº 81, permanecerían evidentemente los mismos si la potencia P estuviese inmediatamente aplicada á la tuerca; pero en general el valor de esta potencia variará segun su brazo de palanca R y el modo con que estan guiadas en su movimiento la rosca y la tuerca. Se presentan, en efecto, diversos casos que examinar.

Suponiendo, por ejemplo, la tuerca abcd (fig.ª 67) completamente fija, puede suceder que, no teniendo la rosca mas objeto que elevar un peso que tiene la facultad de girar con ella, esté únicamente guiado en su carrera por la tuerca; entonces la potencia P, obrando á cierta distancia del eje AB tenderá á hacer apoyar la superficie exterior y cilíndrica de los

filetes de la rosca contra la que corresponde en la tuerca; será pues, preciso (36 y 55) descomponer la potencia P en otras dos paralelas y que obren en los planos ab, cd que limitan la tuerca hácia su parte superior é inferior, y que contiene los filetes de la rosca sometidos á la presion lateral.

Llamando a y b las distancias del plano en que obra P á los planos ab y cd de la tuerca, l al espesor de esta tuerca ó la distancia de ab á cd, se tendrá para la componente que obra segun ab en sentido de P... $\frac{Pb}{l}$, para la que obra segun cd en sentido contrario de P... $\frac{Pa}{l}$.

Como estas espresiones dan lugar á los rozamientos $f\frac{Pb}{l}$, $fP\frac{a}{l}$ que se ejercen sobre la superficie cilíndrica esterior de los filetes, tendran para brazo de palanca el radio r' de esta superficie, un poco superior á r; se tendrá pues, observando que las presiones normales y los rozamientos tangentes á la superficie helizoidal de los filetes de la rosca estan distribuidos simétricamente alrededor de su eje, de suerte, que no tienden de ningun modo á cambiar su direccion, se tendra, digo, la ecuacion de equilibrio

$$PR = Qr\,\frac{\tang\alpha + f}{1 - f\tang\alpha} + f\left(\frac{Pb}{l} + \frac{Pa}{l}\right)r'$$

Si además la potencia P se compusiera de dos ó muchas fuerzas iguales que obrasen simétricamente alrededor del eje de la rosca, el último

término de la ecuacion anterior seria evidentemente nulo.

Rozamiento de las guias ó collares de la rosca.

85. Cuando la rosca está guiada por collares especiales, lo que sucede muchas veces para evitar que las presiones $\frac{Pb}{l}$, $\frac{Pa}{l}$ y los rozamientos que de ellas resultan, adquieran demasiada influencia, se deben reemplazar estos rozamientos por los que tienen lugar sobre las aristas esteriores de estos collares; y entonces a, b, l espresan las distancias que los separa ya del plano de la potencia P, ya entre sí.

Modo de tener en cuenta en ciertos casos los rozamientos del collar y de las guias de la carga.

86. Cuando el peso Q no puede girar libremente con la rosca, y está sujeto á moverse paralelamente á sí mismo, entonces no está unido á ella sino por un collar ó anillo que dá lugar á un rozamiento cuyo brazo de palanca se valuará segun lo que se ha dicho en el núm.º 41 y cuyo momento estará representado por una espresion de la forma

$$\frac{2}{3} f'Q \frac{\rho^2 + \rho\rho' + \rho'^2}{\rho + \rho'}$$

que se añadirá al segundo miembro de la ecuacion anterior. Pero como este rozamiento puede dar lugar á una presion sobre las guias del peso

será necesario en ciertos casos tener en cuenta la resistencia que de ella resulta sobre estas guias.

Llamemos L la distancia (36) á que obra del eje de la rosca, f'' el coeficiente que le es relativo, su intensidad absoluta estará medida por la espresion

$$f''\times\frac{2}{3}f'Q\frac{\rho^2+\rho\rho'+\rho'^2}{(\rho+\rho')L}=\frac{2}{3}\frac{(\rho^2+\rho\rho'+\rho'^2)}{(\rho+\rho')L}f'f''Q$$

porque el momento de la presion á que dá lugar debe evidentemente ser igual al del rozamiento sobre el collar de la carga: la espresion anterior deberá además añadirse á Q en la ecuacion de equilibrio de la rosca, es decir, que se deberá reemplazar en ella Q por

$$Q\left(1+\frac{2}{3}\frac{\rho^2+\rho\rho'+\rho'^2}{(\rho+\rho')L}f'f''\right)$$

cantidad á la que será preciso además añadir el peso propio de esta rosca y de su armazon para obtener la carga total de la tuerca.

Rozamiento del gorron de las roscas de compresion

87. Sucede algunas veces que la tuerca permaneciendo fija, el objeto de la rosca es comprimir ó rechazar ciertos cuerpos hácia su estremo inferior B (figª 67); este estremo termina entonces en forma de gorron y dá lugar á un rozamiento que se tendrá en cuenta añadien-

do (42) un término de la forma

$$\frac{2}{3} f_1 Q\rho .$$

al segundo miembro de la ecuacion de equilibrio, siendo ρ el mayor radio de la parte rozante, Q la fuerza de compresion, y por consiguiente Q-q la carga que obra realmente para solicitar á la tuerca de abajo arriba.

Influencia del rozamiento de las guias de la tuerca.

88. En estos casos (figª 68) la rosca es solamente susceptible de girar alrededor de su eje A B sin que se desvie este de su lugar, siendo solo la tuerca a b c d movil á lo largo de ese eje sin poder girar; entonces la rosca roza sobre un gorron inferior B ó sobre un espaldon m n colocado cerca de su cabeza, mientras que la tuerca está mantenida en una direccion paralela por medio de guias de orejas, abrazaderas &; no habrá pues dificultad de establecer la ecuacion de equilibrio, en este caso, observando que la carga de la rosca se compone del peso Q de la tuerca y de su armazon, así como del rozamiento de las guias, cuyo valor será aquí evidentemente

$$f'' \frac{pr}{L}$$

r y p, teniendo las significaciones indicadas en el numº 81, y siendo L la distancia del punto de apoyo de las guias al eje de la rosca, de suerte

que se tendrá, en el caso actual para determinar el valor de p

$$p=\left(Q+f''\frac{pr}{L}\right)\frac{\tan\alpha+f}{1-f\tan\alpha},$$

de donde

$$p=Q\frac{\tan g\,\alpha+f}{1-f\tan g.\alpha-\frac{f''r}{L}(\tan g.\alpha+f)}$$

valor que será preciso introducir en lugar de

$$Q\ \frac{\tan g\,\alpha+f}{1-f\tan g\,\alpha}$$

en la ecuacion de equilibrio del num.º 84 anterior.

En cuanto á la presion que sufre el espaldon superior ó el gorron inferior de la rosca, será, siendo q el peso de esta rosca y de su armazon

$$Q+f''\frac{pr}{L}+q=Q\frac{1-f\tan g\alpha}{1-f\tan g.\alpha-f''\frac{r}{L}(\tan\alpha+f)}+q$$

de donde es facil deducir el momento del rozamiento de este gorron ó de este espaldon.

Caso en que la potencia está directamente aplicada á la tuerca; observaciones generales.

89. En fin, puede suceder que la potencia esté directamente aplicada á la tuerca, que girara entonces sobre sí misma, rozando sobre una placa ó banda anular (43) como en las roscas de las puertas de esclusa, las verjas de los cercados, ó en los pernos de ensambladura; es evidente que la ecuacion de equilibrio del sistema, podrá establecerse de un modo absolutamente semejante teniendo en cuenta las diversas circunstancias en que están colocadas las

partes rozantes del sitema.

En general las formulas que preceden pondran en estado de calcular las deferentes resistencias y disminuir lo mas que sea posible su influencia por medio de disposiciones bien entendidas, disminuyendo su momento respecto al eje dela rosca y sustituyendo principalmente el rozamiento delos gorrones al delos espaldones, ó bandas anulares, cuyo brazo medio de palanca no puede nunca ser muy pequeño, y debe siempre ser comparable al radio medio de la rosca y de la tuerca.

Se vé ademas cuanto importa disminuir en cada caso todo lo que sea posible este radio sin perjudicar á la solidez de la rosca y dela tuerca, debiendo por consiguiente arreglarse á los principios que prescribe la teoria dela resistencia de los materiales.

Valor que debe atribuirse al radio medio de los filetes de la rosca.

90. En cuanto al valor que debe atribuirse al radio r de la hélice media del filete, es evidente que, en la mayor parte de los casos será suficientemente exacto tomarle igual á la semi-suma de los radios estremos del filete; pero como puede suceder que la diferencia de estos radios ó el espesor de los filetes, sea muy comparable al

espesor del alma, principalmente en las roscas que obran por traccion; parece evidente tambien que se podria cometer un error notable si se continuase atribuyendo tal valor al brazo de palanca medio r; por lo cual en ciertos casos especiales podria no bastar la aproximacion de los valores que dan las fórmulas anteriores.

Curso de Mecánica

aplicada á las máquinas.

Seccion adicional.

I.

De los engranages ó medios geométricos de hacer uniforme la velocidad de las piezas susceptibles de adquirirla.

1. En las consideraciones generales acerca de las máquinas expuestas en la 1.ª seccion, hemos visto (22 y 29) la importancia que tiene el disponer ciertas piezas, principalmente las ruedas, de modo que se transmitan la velocidad geométrica en relaciones constantes, en todas las posiciones del sistema. Es esencial por lo tanto entrar en algunos detalles acerca del trazado de estas piezas, y determinar tambien las dimensiones que deben tener para resistir á los esfuerzos que transmiten, y apreciar, por último, las resistencias pasivas á que dan lugar en las máquinas.

Hay tres medios de transmitir la velocidad de las ruedas en relacion constante cuando sus ejes son paralelos. 1.º: por el simple contacto de las coronas de estas ruedas sometidas á una pre-

sea suficiente para que rodando unas sobre otras no haya deslizamiento, sino que durante el movimiento, se desarrollen arcos de igual longitud en ambas ruedas. 2º: por medio de cuerdas ó correas sin fin arrolladas sobre estas coronas y sometidas á una tension suficiente para que no deslicen sobre ellas. Este medio tiene bastante aplicacion en las máquinas y se presta á comunicar velocidades de una rueda á otra en relaciones muy extensas y constantes. 3º: el medio usado mas generalmente para resolver este problema, y que se presta á transmitir grandes esfuerzos, consiste en colocar sobre las superficies de las coronas de las ruedas, partes salientes llamadas dientes, que, introduciéndose recíprocamente unas en otras, ligan entre sí el movimiento de ambas ruedas. Esta disposicion es lo que constituye los engranages de cuyo estudio vamos á ocuparnos.

2 El engranage se llama cilíndrico ó plano cuando los ejes de las ruedas son paralelos y por consiguiente estas dos ruedas estan comprendidas entre dos planos perpendiculares á sus ejes. De la condicion de que las velocidades permanezcan en una relacion constante, se deduce una consecuencia que sirve de base al trazado de estos engranages. En efecto, sean O y O' (figª 69) los centros de las ruedas; dividamos la recta que los une en dos partes OA, O'A que esten en

una relacion dada; los dos círculos O A, O'A serán tangentes en A. Llamando w y w' las velocidades angulares que tomarian estos círculos si rodasen el uno sobre el otro, y R y R' sus radios respectivos, resultaria que desarrollando arcos iguales en ambas circunferencias, existiría entre dichas cantidades la relacion

$$Rw = R'w'$$

de donde $\frac{w}{w'} = \frac{R'}{R} = \frac{O'A}{OA}$,

es decir que las velocidades angulares estarán en una relacion constante é inversa de los radios; luego la condicion recíproca de las ruedas de engranage debe ser tal que el movimiento se transmita como si los dos círculos O A, O'A rodasen uno sobre otro; y á esta condicion debe satisfacer la forma de las curvas que afecten los dientes.

Los círculos O A, O'A cuyos radios están en razon inversa de las velocidades angulares se llaman círculos primitivos y son los que sirven de punto de partida para el trazado de los engranages.

3. Supongamos tomado arbitrariamente el perfil a b (fig.ª 59) de uno de los dientes y tratemos de hallar la forma A B del diente de la otra rueda para que por su presion contínua sobre a b produzca el movimiento que satisfaga á la condicion anterior.

Si se supone que la rueda O' (figª 70) haya girado de modo que el rádio O'a haya llegado á la posicion O'a' y el perfil ab á a'b', la otra rueda O habrá debido girar un ángulo A O A' tal que el arco A A' = a a', y en esta posicion la curva desconocida A B trasladada á A' B' deberá tambien tocar el perfil a'b' en un cierto punto m'. Un contacto análogo se reproducirá para toda rotacion que satisfaga á la igualdad de los arcos recorridos por los puntos A y a; pero como en este movimiento las dos curvas A B y a b cambian simultaneamente de posicion, no es facil percibir la relacion geométrica que debe ligarlos entre sí, lo cual seria mas sencillo, si una de las dos curvas permaneciere fija. Vamos pues á tratar de referir la cuestion á este caso.

4. A este efecto, cuando las dos ruedas han tomado ya la posicion en que los dientes se hallan en A'B' y a'b', hagamos girar todo el sistema alrededor del punto O sin alterar la posicion relativa de ninguna de sus partes y de modo que el radio O A' vuelva á su posicion primitiva O A, y el perfil A'B' á AB. La linea de los centros habrá descrito el angulo $O'OO_2$ correspondiente á un arco $A A_2$ igual á A A'; el circulo O' habrá venido á ser el circulo O_2 y el perfil a'b' habrá tomado la

posicion $a_2 b_2$ que deberá ser tangente al perfil primitivo AB como sucedia con $a'b'$ y $A'B'$. Pero como los arcos $A_2 A$ y $A_2 a_2$ son los mismos que AA' y Aa' que tienen por hipótesis, la misma longitud; se sigue que estos arcos $A_2 A$ y $A_2 a_2$ son tambien iguales entre sí, y de aquí resulta esta consecuencia notable; el círculo O_2 con su perfil $a_2 b_2$ no es otra cosa que lo que vendria á ser el círculo O' con su perfil ab, si se hiciese rodar este último círculo sin deslizar, sobre la circunferencia O quedando esta fija con su perfil AB. Y como sucederia lo mismo con cualquiera otro ángulo de rotacion, siempre que se verificase la condicion $AA' = aa'$, se puede establecer el siguiente principio: siempre que dos círculos tangentes O y O' giran alrededor de sus centros fijos, de modo que sus circunferencias tengan velocidades iguales, sus posiciones relativas, y las de las curvas que llevan consigo, son las mismas que si se hubiera dejado el círculo O fijo; y hubiera rodado sobre él el círculo O'.

5. Se vé pues, que la curva AB (fig.ª 71) debe ser la envolvente de todas las posiciones $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ que ocupa la curva ab cuando rueda el círculo O' sobre el O permaneciendo este fijo. Así, despues de haber construido un cierto número de posiciones O'_2 O'_3 del círculo mó-

vil; con sus curvas correspondientes, no habrá mas que trazar una curva $A e_1 e_2 e_3$ que sea tangente á todas estas curvas. Pero este procedimiento que es ya suficientemente exacto, puede serlo mas, segun vamos á ver, determinando la posicion misma de los puntos de contacto. Para esto, observemos que la envolvente de todas las curvas ab, $a'b'$, $a_2 b_2$ no es otra cosa que el lugar de las intersecciones consecutivas i, i', i'' de todas estas curvas suponiéndolas infinitamente próximas, porque este lugar tendrá dos puntos comunes con cada una de las involutas, y por consiguiente, será tangente á cada una de ellas. Por tanto, si consideramos uno de los círculos O_2' con su curva correspondiente $a_3 b_3$, y se tira á esta una normal $A_3 e_3$ desde el punto de contacto del círculo movil, el punto e_3 será el de contacto de la envolvente con la curva $a_3 b_3$. En efecto, al pasar el círculo O' en su movimiento de rotacion á una posicion infinitamente próxima, el punto e_3 describe un arco elemental cuyo radio es la distancia $A_3 e_3$ y este arco será tangente á la vez á ambas curvas, las cuales tendrán por lo tanto, su contacto mútuo en e_3, siendo su normal comun $A_3 e_3$; es decir, que la normal comun á las dos curvas pasa siempre por el punto de contacto de los círculos primitivos. Segun esto, dada la curva

a b se podrán tirar normales á sus diversas posiciones desde los puntos A_2 A_3 las cuales determinarán otros tantos puntos e_2 e_3 de la envolvente general. O bien por un procedimiento aproximado se buscará para cada posicion a_3 b_3 una abertura de compás tal que describiendo desde el centro A_3 un pequeño arco de círculo toque á la curva a_3 b_3, y uniendo los diferentes arcos de círculo trazados de este modo por una curva continua se tendrá un trazado de la envolvente suficientemente exacto.

6. Este método puede simplificarse en la práctica evitando el trazado de las diversas posiciones del círculo movil y de su curva a b. En efecto, para describir la envolvente solo necesitamos conocer las longitudes de la normal comun para diferentes puntos A A_1 A_2 tomados en el círculo fijo á distancias que supondrémos iguales. Ahora bien, si sobre el círculo movil O' (figª 72) en su primera posicion tomamos arcos iguales á partir de A como A a_1, a_1a_2 a_2a_3, é iguales á los del círculo fijo, es claro que la longitud de las normales determinadas en la figª 71 serán las mismas que las que obtendríamos bajando desde los puntos a_1 a_2 a_3 de la figura 72 las correspondientes normales a_1e_1 ... a_2e_2 ... á la curva ab en su primera posicion, y con estas normales como radios, trazaríamos desde los puntos A_1 A_2 &, los arcos elementales que determinan la envolvente

A B buscada.

Esta curva se llama conjugada de la curva dada ab y recíprocamente: y observamos que estando esta última interior al círculo primitivo O' su conjugada A B es exterior al círculo primitivo O.

Si hubiésemos aplicado este método á una curva ab como la de la figura 73 que se extendiese á uno y otro lado del punto m en que corta al círculo primitivo O' se hubiera obtenido para envolvente ó para conjugada la curva A B compuesta tambien de dos ramas, una exterior y otra interior al círculo primitivo O: La construccion para su trazado se reduce, segun hemos visto antes, á tomar, á partir de un punto como m arcos iguales ma_1, a_1a_2, a_2a_3 y á partir del punto correspondiente m' tal que los arcos $tm = tm'$, tomar otros arcos $m'A_1$, A_1A_2 iguales á los anteriores; trazar las normales á la curva ma desde los puntos $a_1\ a_2$ y tomándola por radios describir desde los puntos $A\ A_1$ arcos elementales que determinan la envolvente $m'B$. De un modo análogo se hubiera procedido para determinar la rama interior $m'A$ de esta envolvente, conjugada con la parte ma exterior de la curva dada.

Conocidas estas curvas podemos ya prescindir de la hipótesis que hicimos en el número 4 acerca del movimiento del círculo O' rodando sobre el O, que no tenia mas objeto que averiguar la natu-

raíza de dichas curvas; y consideremos ya el movimiento tal como realmente se verifica que es girando las dos ruedas alrededor de sus centros fijos y conservándose siempre en un mismo punto t el contacto de los dos círculos primitivos, por el cual pasarán (5) las normales á las curvas conjugadas en sus diferentes posiciones. Para determinar varias de estas se tomarán, á partir del punto t arcos iguales t1 — 1.2 — 2.3 sobre las dos circunferencias y estos puntos serán los que estarán en contacto sucesivamente durante el movimiento, y colocando en ellos las respectivas curvas de los dientes, indicarán las posiciones sucesivas que van ocupando, y las normales comunes en sus diversos puntos de contacto n n' n" pasarán todas por el punto t. Las ramas esteriores se llaman caras de los dientes, y las interiores los flancos.

7. Se observará, como resultado de la construccion de estas curvas, que la rama interior de la AB conduce á la esterior de la curva ab y la rama esterior de la primera á la interior de la segunda, verificándose la primera conduccion antes de tocarse las curvas en la línea de los centros. Esto se espresa diciendo que los flancos de los dientes de una rueda conducen a las caras de los de la otra y recíprocamente.

Se sigue tambien de aquí, que para que una rueda conduzca á otra ...amente despues

de la línea de los centros, bastará que los dientes de la rueda conductriz tengan caras y los de la conducida flancos. Si la primera hubiera de conducir solamente antes de la línea de los centros sus dientes deberian tener flancos solamente y los de la otra rueda, caras; pero esta disposicion no conviene en la práctica porque puede dar lugar á apuntalamientos de los dientes, y otros inconvenientes, por los cuales se suele decir que una rueda no puede ser conductriz, cuando del trazado de las curvas de sus dientes solo presentan estos flancos y no caras. Lo mas ordinario en la práctica es, no obstante, hacer que las ruedas se conduzcan antes y despues de la línea de los centros en los casos que es posible hacer que los dientes tengan caras y flancos; pero se limitan á muy cortos espacios los conducidos por cada diente, por lo cual los contactos se verifican muy inmediatos á la línea de los centros y los inconvenientes mencionados antes, se disminuyen mucho ó casi desaparecen.

8. Aunque el metodo dado en el número 6 para hallar la curva conjugada de otra, es general, cualquiera que sea esta ultima, no siempre es posible en la práctica hacer uso de las curvas determinadas. En efecto, si la curva dada fuese tal, que las normales

á sus dos ramas exterior é interior encontrasen á la circunferencia á un mismo lado del punto m, en las dos partes correspondientes de la curva conjugada sucederia lo mismo respecto al punto m'; y aunque el trazado geométrico de esta curva no tendria dificultad, no se las podria adoptar para perfil de los dientes porque se penetrarian, y habria que limitarse á hacer uso de las caras solamente de los dientes de la rueda conductriz y los flancos de los de la conducida.

Puede suceder tambien que las curvas halladas no sean admisibles en la práctica, si alguna de ellas resultase cóncava, y los contactos fuesen entre superficies de esta clase, porque entonces pueden presentarse entorpecimientos al movimiento de los dientes, por conservarse con mas facilidad los cuerpos estraños que se introducen entre ellos, siendo ademas su trazado de ejecucion mas dificil.

Por estas razones se han dado en la práctica, soluciones particulares á esta cuestion, eligiendo las curvas mas fáciles de construir, limitándose asi al uso de dos clases de engranages, que son los de epicicloides, y los de evolventes de círculo, de cuyo estudio vamos á ocuparnos sucesivamente.

Engranages de epicicloides.

9. Para estudiar la aplicacion de las epicicloides á los engranages, convendrá recordar brevemente el trazado y algunas propiedades de estas curvas.

Sabido es, que se originan por el movimiento de un punto A (fig.ª 74) de una circunferencia de círculo O' que rueda sin deslizar sobre otro círculo fijo O; Hallando, pues, las posiciones del punto generador en las diferentes situaciones del círculo movil, para lo cual basta tomar sobre este, arcos de igual longitud á los recorridos en el círculo fijo, se tendrá trazada por puntos la epicicloide AB. Habiendo tomado de antemano partes iguales en ambas circunferencias á partir del punto A, se podrá construir la epicicloide como envolvente de los arcos elementales trazados con centro en los diferentes puntos 1'..2'...3' de la circunferencia fija, y tomando por radios las cuerdas correspondientes A1... A2 de la circunferencia movil. Por último, puede obtenerse su trazado por las intersecciones de los arcos elementales anteriores con los arcos correspondientes descritos desde el centro O tomando por radios las distancias O1, O2, O3, cuya construccion está indicada para el punto M.

Para tirar una tangente á la epicicloide en este último punto, suponiendo conocida la posicion del círculo generador correspondiente O_3 bastará tirar la normal que será la cuerda M 3', puesto que el punto de contacto 3' es el centro del arco elemental correspondiente á M, y la tangente, debiendo ser perpendicular á la recta anterior, será evidentemente la recta MT que une el punto M con el extremo del diámetro T3'. Si este círculo generador no estuviese trazado, se podrá hallar facilmente su centro O_3 por la interseccion de dos arcos de círculo descritos, el uno desde O con un radio OO' igual á la suma de los dos rádios de los círculos dados, y el otro desde el mismo punto dado M con un radio igual á M O_3 que es el radio del círculo móvil.

Si el radio del círculo fijo fuese infinito, la epicicloide se convertirá en una cicloide; y si el rádio del círculo móvil fuese infinito, la curva seria una evolvente del círculo fijo. De estas curvas particulares tendremos que hacer uso en los engranages.

La epicicloide AB se llama exterior porque está engendrada por un círculo movil O' que es exterior al círculo fijo O. Cuando el círculo móvil es interior al fijo, la epicicloide es interior.

10. Un caso particular de la epicicloide interior muy usado en los engranages, es el que resulta cuando el círculo móvil tiene un diámetro igual al rádio del círculo fijo. La epicicloide se convierte en una recta que es diámetro del círculo fijo. En efecto; sea O' (fig.ª 75) el círculo móvil, O el fijo y A el punto generador de la curva. Cuando el círculo móvil ocupe la posicion O_2, los arcos B A y B A' serán iguales y el punto generador se hallará en A' que es precisamente un punto del diámetro A D tirado por A; porque los angulos B O A y B O A' serán iguales, pues el primero estará medido por el número de grados contenidos en el arco A B, y el segundo por la mitad del número de grados contenidos en el arco B A', cuya mitad es precisamente igual á los grados contenidos en A B. Luego los dos ángulos citados tienen la misma medida, y esto exige que el punto A' se halle sobre la misma recta O A.

Las epicicloides pueden trazarse en la práctica por un movimiento contínuo haciendo uso de dos segmentos de círculo A y B; (fig.ª 76) labrados de madera. Se fijará una cinta ó tira de pergamino al segmento A, en un punto C, y el otro extremo se fijará al segmento B en un punto D. Ha-

ciendo rodar el segmento A sobre el B de modo que se halle siempre tensa la cinta aplicada segun DC, el punto de contacto M del segmento movil describirá la epicicloide ME.

Pasemos ya á la aplicacion de estas curvas en los engranages cilíndricos, á cuyo efecto los dividiremos en tres clases.

1.ª Engranages esteriores, que son aquellos en que los círculos primitivos de las ruedas se tocan esteriormente.

2.ª Engranage de rueda y barra dentadas en los que uno de los círculos primitivos se convierte en una recta.

3.ª Engranages interiores en los cuales, uno de los círculos primitivos está dentro del de la otra rueda.

4.ª Engranages de linternas combinados con cualquiera de las clases anteriores, llamándose linternas una especie de tambores en que los dientes se reemplazan por husillos cilíndricos.

Engranages esteriores de epicicloides.

11. Sean O, O' (fig.ª 77) los centros de los círculos primitivos de las ruedas, y tomemos para curva de los dientes de la rueda O', la epicicloide interior ab engendrada por un círculo cualquiera C rodando sobre la circunfe-

rencia del O' y tratamos de hallar la curva conjugada de $a\,b$. Debiendo ser la curva buscada, la envolvente de todas las posiciones que tomaria la $a\,b$ en el movimiento relativo del círculo O' sobre el O (5), la trazariamos por esta condicion siguiendo el método ya conocido y representado en la figura 77; y resultaria la curva $A\,B$. Vamos á hacer ver que esta curva es precisamente la epicicloide que describiria el mismo punto a del círculo generador C rodando este sobre la circunferencia del círculo primitivo O. En efecto, en una posicion cualquiera O_2 del círculo O', tracemos el círculo generador C_2 tangente á los otros dos en el punto A_2: la circunferencia de este círculo generador, cortará á la epicicloide $a_2\,b_2$ en un punto m tal que el arco $A_2\,m$ será igual al $A_2\,a_2$; pero á causa de la rotacion del círculo O' sobre el O, el arco $A_2\,a_2$ será igual al $A_2\,A$, luego los arcos $A_2\,m$ y $A_2\,A$ serán iguales, y de consiguiente, el punto m de la curva $a_2\,b_2$ pertenece tambien á una epicicloide engendrada por el mismo punto, rodando su círculo sobre el O. Estas dos epicicloides son además tangentes en el punto comun m, pues que para una y otra la normal es (9) la cuerda $A_2\,m$ del círculo generador.

Podemos, pues, establecer como principio general, que cuando se toma para curva de los dientes de una rueda la epicicloide engendrada por un punto de un círculo movil que rueda sobre el circulo primitivo de dicha rueda, la curva conjugada que debe adoptarse para los dientes de la otra rueda, es otra epicicloide engendrada por el mismo punto que la primera, rodando el círculo movil en el mismo sentido sobre la circunferencia primitiva de la otra rueda.

12. Esta propiedad de las epicicloides, simplifica el trazado de las curvas conjugadas mucho mas que la aplicacion del metodo general espuesto en los números 5 y 6.

El radio del círculo ausiliar generador de las epicicloides, siendo arbitrario le fijaremos de modo que las curvas que resulten llenen las condiciones necesarias en los engranages y sean de un trazado fácil.

Supongamos que se ha elegido por circulo ausiliar el que tiene su centro en C (fig.ª 78) y cuyo diámetro es menor que el radio del circulo primitivo O'; y tomemos para curva de los dientes de la rueda conductriz O la epicicloide A M engendrada por el punto A de dicho circulo ausiliar rodando esteriormente sobre el O; Resultará para curva conducida

la epicicloide (11) interior A N' engendrada por el mismo punto A del círculo auxiliar rodando interiormente sobre el O'. Estas dos curvas A M' A N' dando lugar á contactos entre superficies concavas no deberán emplearse (8) para dientes de engranages.

Tomando por círculo auxiliar el que tiene por diámetro el radio A O' del círculo primitivo, y por curva conductriz la epicicloide A M' que engendraría el punto A de dicho círculo rodando sobre el círculo primitivo O, la curva conjugada que resultaría para los dientes dela rueda conducida sería el diámetro A N' (10) del mismo círculo O'. El contacto tendría lugar entre un plano y una superficie cilíndrica; es además el que presenta un trazado mas sencillo; por lo cual es el que se elige casi siempre en esta clase de engranages.

Si el círculo auxiliar fuese el C'' cuyo diámetro es mayor que el radio del círculo primitivo las dos curvas conjugadas serían las epicicloides A M'' y A N'' que ofrecen un contacto entre dos superficies convexas pero que difiere poco del anterior, porque la curvatura de la epicicloide A N'' deberá ser muy pequeña para evitar el inconveniente que se mencionará en el núm.º 18: y como su trazado es menos sencillo que el anterior se prefiere hacer uso de aquel.

13. Fijándonos, pues, en admitir por círculo auxiliar el que tiene por diámetro el rádio del círculo primitivo O' de la rueda conducida, examinemos como se verificará la conduccion en este caso (figª 79). Siendo la epicicloide a M exterior al círculo primitivo O y la recta a O' interior al otro círculo primitivo; la primera servirá para cara de los dientes (7) y la segunda será el flanco de los dientes de la otra rueda, y como su primer contacto empieza en el punto a de la línea de los centros, será conductriz la rueda inferior O, y conducida la superior O'; y esta conduccion tendrá lugar desde la línea de los centros OO' en adelante.

El lugar de los contactos sucesivos n n' se verificará en los puntos en que la circunferencia del círculo auxiliar corta á las caras y flancos (5 y 9) en los cuales se verifica que la normal es comun y pasa siempre por a. Será pues fácil determinar la extension de curva a M necesaria para conducir un espacio angular medido por un arco cualquiera a A: se tomará para esto un arco a B = a A en el círculo O' y se marcará la posicion B O' del flanco, y por consiguiente, el punto n' que habrá de ser del último contacto; describiendo pues un arco n' m concéntrico al del círculo primitivo O, su interseccion m con la epicicloide a M,

marcará la estension am que debe tener esta curva para conducir durante el espacio angular aA. La estension del flanco correspondiente quedará igualmente determinada por la parte de radio Bn' que referida á su primitiva posicion por un arco $n'h$ concéntrico á O' marcará la magnitud ah del flanco necesario.

Engranage simétrico de epicicloides y flancos rectos siendo conductriz la rueda inferior (fig.ª 80).

14. Fácil es, despues de lo que precede indicar el trazado de esta clase de engranages.

Serán datos para esta clase de problemas, la distancia OO' que separa los centros de ambas ruedas y la relacion $\frac{w}{w'}$ entre las velocidades angulares de las mismas, lo cual nos determinará los radios $R = OA$ y $R' = O'A$ de cada una en virtud de la relacion fundamental

$$\frac{w}{w'} = \frac{R'}{R}$$

Conocidos los radios, y por consiguiente las circunferencias, se determinará el número de dientes de cada rueda. Para esto se supondrá conocido el espesor que debe dárseles por las fórmulas que indicaremos mas adelante (33) cuyo espesor e se mide en el arco de las circunferencias primitivas. Como los dientes han de estar separados en cada rueda por espacios vacios que se llaman cóncavos cuya magnitud escede al espe-

sor de los dientes en $\frac{1}{10}$ ó $\frac{1}{20}$ para que se alojen con holgura los dientes de la otra rueda, resultará que el arco comprendido por un diente más un cóncavo que es lo que se llama paso del engranage y representaremos por a será

$$a = e + 1{,}1e = 2{,}1e$$

Es claro que si ahora se divide cada una de las circunferencias por a se tendrá el número de dientes de cada rueda; llamando m y m' estos números, se tendrá, pues,

$$m = \frac{2\pi R}{a} (1)\;;\; m' = \frac{2\pi R'}{a} = m\frac{R'}{R} = \frac{m}{\frac{R}{R'}} (2)$$

Como estos dos números m y m' deben ser enteros, no podrá conseguirse esto, en general, sin variar algo el paso del engranage, lo cual, siendo por exceso y en pequeña cantidad, no tiene inconveniente: así, pues, se elegirá para m un número entero algo inferior al que dá la fórmula anterior (1), y que llene además la condicion de ser divisible por la relacion $\frac{R}{R'}$, en cuyo caso el número m' será también número entero segun aparece de su valor (2).

Fijados así m y m' y hallado el valor definitivo del paso por la ecuacion (1) en que m es ya determinado, se procederá al trazado del engranage que nos ocupa en la forma siguiente.

Se dividirán los círculos primitivos en

partes iguales al paso tales como ac, ac, AC, AC, (fig.ª 80) y se subdividiran despues cada una en dos partes desiguales $ab=e$ y $bc=1,1e$, $AB,=e$, $B,C,=1,1e$ que marquen el espesor y el cóncavo de los dientes.

Se tomará para cara de los dientes de la rueda conductriz O la epicicloide AM (13) engendrada por el círculo auxiliar de diámetro $AO'=R'$ y, para flancos de la rueda conducida; los radios AO' que engendra el mismo círculo auxiliar, rodando sobre la circunferencia interior de O'.

La magnitud de estas curvas se fijará por la condicion necesaria para la continuidad del movimiento, la cual exige que cada diente nó cese de conducir hasta que el siguiente empiece á hacerlo; es decir, que el espacio que deben conducir cada uno debe ser por lo menos igual al paso del engranage; por consiguiente, por medio de la construccion indicada (13) se fijará la porcion AM y cm de caras y flancos y terminarán así los dientes de la rueda en el arco mM concéntrico al círculo primitivo: pero convendrá en este caso darles un pequeño aumento de longitud para asegurar la continuidad del movimiento.

La condicion de simetria de estos engranages que tiene por objeto el que pueda conducir la rueda O tanto de derecha á izquierda como en

sentido contrario, exige que se tracen los dientes de ambas ruedas simétricos respecto á los rádios O'h, OH que pasan por el medio del espesor de los dientes, con lo cual estos quedarán completamente trazados. Para terminar los contornos de los cóncavos de la rueda pequeña O' (que ordinariamente se llama piñon), bastará segun se acostumbra en la práctica, prolongar los dos flancos cm, bn, hasta e y d en una estension suficiente para que pueda penetrar la parte mas saliente de los dientes de la rueda O; de consiguiente, en una estension, por lo menos igual á ar mas un pequeño huelgo (unos $0^m,005$); por lo tanto, bastará trazar con centro en O' y un radio algo menor que O'r, un arco e d s que terminará el fondo de los cóncavos, con lo que quedará completo el trazado de todas las partes del engranage puesto que los dientes del piñon se terminarian por el círculo O'a y en la rueda O no hay necesidad de cóncavos para alojar estos últimos dientes; pero siempre para el libre juego de las ruedas, seria necesario terminar estos cóncavos por un arco concéntrico é interior al círculo primitivo O (en un centímetro próximamente) y lateralmente por las pequeñas porciones de radios correspondientes.

Engranage simétrico de epicicloides y flancos rectos, siendo conductor el piñon C' (figª 81).

15 Es claro que si se quisiera que fuese el piñon C' el que condugese la rueda C, no habria mas que repetir las construcciones del número anterior, haciendo en la rueda C las correspondientes al piñon anterior y vice-versa, pues todo se reduce en este caso; á que los dientes del piñon tengan caras y los de la rueda, flancos. Siguiendo el procedimiento general (13) en la determinacion de las curvas, se elegiria para círculo auxiliar generador de las epicicloides de los dientes del piñon el C'' que tiene por diámetro el radio de la rueda C.A, y este mismo círculo auxiliar rodando interiormente sobre dicha circunferencia C engendraria los flancos rectilíneos. La extension de estas curvas para que cada diente condujese un arco igual al paso del engranage, se determinarian análogamente que antes y serian las porciones $Cm = aM$ y $C,m = aA$ determinadas por las circunferencias de radios $C'm$, Cm, siendo m el último contacto correspondiente á un arco AC, igual al paso. Los dientes de una y otra rueda serian simétricos respecto á los radios que pasan por el punto medio de su espesor. Los cóncavos de la rueda C estarian formados lateralmente por la prolongacion de los flan-

cos en porciones iguales á Ar mas el huelgo rs y en su fondo por arcos concéntricos al C cuyo rádio es Cs, construcciones todas idénticas á las del número anterior y que es inútil repetir aquí.

Engranage simétrico y recíproco de epicicloides y flancos rectos.

16 Este problema que es el que generalmente tiene lugar en la práctica, no es mas que la reunion de los dos anteriores, porque habiendo de ser recíproca la conducción de las ruedas, es decir, que cada una pueda ser conductriz y conducida, claro es que cada una ha de tener las mismas partes que se han representado en las figuras 80 y 81; es decir, que los dientes de cada rueda se compondrán de caras y flancos que serán epicicloides y rectas, engendradas respectiva y sucesivamente por dos círculos generadores cuyos diametros son los rádios de los círculos primitivos, y rodando esterior é interiormente á estos. Ambas ruedas necesitarán tambien cóncavos trazados como en los casos anteriores, y, en fin, todas las construcciones para el trazado de este engranage serán las que hemos detallado en las dos figuras 80 y 81 y que se han representado en conjunto en la figura 82 referente á este caso.

Observaciones acerca de este engranage.

17. 1.ª Resulta como consecuencia de lo espuesto (7) que cada diente conducirá antes y despues de la línea de los centros, espacios angulares C,A, AC iguales al paso del engranage, por lo que, la continuidad del movimiento está más asegurada, y en rigor no seria ya preciso que la conduccion fuese en un arco tan grande como el paso del engranage.

2.ª Se observa tambien en la parte de la conduccion anterior á la línea OO' de los centros que los contactos van teniendo lugar en puntos como m', del círculo generador, tales, que las distancias Om', O'm' van siendo cada vez menores, lo cual puede dar ocasion al inconveniente indicado en el núm.º 7 de que pueden resultar apuntalamientos de los dientes, que impidiesen el movimiento; lo cual no puede tener lugar en la conduccion despues de la línea de los centros porque estas distancias O'A, OA van creciendo á medida que se aleja el ~~contacto hasta~~ Om', Om, y el desengrane de los dientes se facilita.

3.ª De estas diferentes posiciones del punto de contacto resulta un inconveniente comun á todos los engranages de epicicloides, que consiste en que la normal comun á las curvas

de los dientes tomando las diferentes inclinaciones an, an' (fig.ª 79) respecto de la línea OO' á medida que se aleja el contacto de los dientes, dá lugar á presiones en estos de intensidad variable que resultan de las componentes del esfuerzo motor F tangencial á las circunferencias primitivas segun dichas normales; por consiguiente, el valor de estas normales es igual para un punto cualquiera n' a' $F \times aO = P \times OH$, $P = \frac{F \times aO}{OH} = \frac{F \times aO}{aO \operatorname{sen} \alpha} = \frac{F}{\operatorname{sen} \alpha}$, es decir, tanto mayor cuanto menor es el ángulo α, ó mas lejano el contacto, lo cual da lugar á que el rozamiento sea mas fuerte en los extremos de los dientes.

4.ª Por último, esta clase de engranages tiene el inconveniente muy notable de que su trazado no permite que una misma rueda pueda conducir á la vez varios piñones de diferentes radios, porque dependiendo las curvas de los dientes de la magnitud de los círculos primitivos de la otra rueda, no podrian servir para varios piñones; así como tambien es consecuencia del trazado de estos engranages el que un pequeño desarreglo ó cambio de posicion de los ejes de las ruedas basta para que las curvas de los dientes no verifiquen la conduccion segun la condicion á que su trazado geométrico se habia arreglado.

18. El primero de estos inconvenientes se ha salvado en la práctica introduciendo una pequeña modificacion en el trazado que hemos esplicado anteriormente y con la cual una misma rueda podrá conducir piñones en diversos radios.

Consiste (fig.ª 83) en adoptar por círculos generadores de caras y flancos de ambas ruedas, dos círculos C' C'' cuyos radios sean iguales, Es claro que rodando el primero esterior é interiormente, sobre las circunferᵃˢ primitivas de la rueda y los piñones, enjendrarán epicicloides como las A M ; A M' ; y rodando análogamente el segundo, enjendrará las A N, A N''; las primeras servirán para la conduccion antes de la línea de los centros, y las segundas para despues de la línea de los centros. Pero aunque sean curvas conjugadas no proporcionarán flancos rectilíneos para los dientes sino curvas mas ó menos pronunciadas segun los diámetros de los círculos generadores difieran mas ó menos de los radios de los círculos primitivos, Para elegir, pues, el radio de dichos círculos ausiliares tendremos presentes las consideraciones del número 12 y con arreglo á ellas, se evitará tomar para dicho círculo generador el que tenga un diámetro superior al radio de los piñones, porque en-

tonces, aunque el contacto es entre superficies convexas, se cae en el inconveniente de que el espesor de los dientes se disminuye mucho en su raiz, porque las dos caras convergen rápidamente hácia este lado: inconveniente que aunque en menor escala se observa tambien en el engranage de flancos rectilíneos (figª 82). Es pues, preferible adoptar por círculo generador el que tiene un diámetro inferior al radio del piñon; y conviniendo que no difiera mucho de este, lo que se hace es tomar para diámetro de dichos círculos auxiliares el radio del menor de los piñones que han de engranar con la rueda para el cual subsistirán así los flancos rectilíneos.

Trazado aproximado de los engranages.

19 vis. En la práctica se procura aumentar el número de dientes con el objeto de que la parte que cada uno haya de conducir sea pequeña y así lo sea tambien la longitud ó saliente de ellos. En estas circunstancias las epicicloides se confunden sensiblemente en la corta estension de cada diente, con arcos de círculo, y se reemplazan sin inconveniente en la práctica en los casos en que los engranages son mas bien de fuerzas que de precision por estos arcos de círculo, cuyo trazado es mas sencillo.

Estos arcos se determinarán por la condicion de que han de ser tangentes en la raiz C del diente (figª 82) al flanco rectilíneo CE y pasar por el extremo m que limita la longitud del diente y se hallā fácilmente (13) por la condicion indicada de que conduzca una extension igual al paso. Bastará hallar el centro y radio del arco que satisfaga á estas condiciones, y podrá sustituirse al arco epicicloidal; ó mas sencillamente aun, adoptar para centro del arco Cm el punto A, y para radio el paso AC del engranage, aunque esto es menos exacto.

Engranages de rueda y barra dentada.

20. La mayor parte de los detalles espuestos en los números anteriores son aplicables al trazado de las demás clases de engranage, por lo que en el relativo á una rueda con una barra dentada, ó cremallera, podremos omitirlos: porque, en realidad, este no es mas que un caso particular del engranage esterior, aquel en que uno de los círculos primitivos tiene un radio infinito.

Sean, pues, AL, AO, (figª 84) la línea y el círculo primitivo de la barra y del piñon y supongamos que haya de ser conductriz la primera.

Un exámen análogo al del numº 12 ...

indicaría que el círculo generador de las curvas de los dientes, que sería preferible en este caso, es también el que tiene por diámetro la distancia A O igual al radio del círculo primitivo del piñon. Rodando este círculo sobre la recta A L, engendrará una cicloide A M que será la cara de los dientes de la barra: y rodando interiormente sobre el círculo primitivo, engendrará los flancos rectilíneos A O.

Elegidas estas curvas se procederá al trazado en la forma indicada en los núm.s 14 y 15.

El número de dientes del piñon se determinará por la fórmula (1), eligiendo el número entero mas próximo á su valor.

Conocido así este número y la extension del paso del engranaje, se procederá á hacer las divisiones en partes iguales á este paso en el círculo primitivo O y en la recta A L. Se subdividirán estas partes en las que marquen los espesores y los cóncavos y se determinará la magnitud de cicloide Cm necesaria para que cada diente conduzca una extension igual al paso, para lo cual, segun sabemos, se tomará este sobre el círculo primitivo desde A á c; se trazará el flanco cd, y el punto m de interseccion con el círculo auxiliar que es la línea de los contactos, marcará el último contacto; tirando, pues, una para-

lela á AL por este punto ó un poco mas elevada que él, servirá para limitar los extremos de los dientes de la cremallera; debiendo ser simetricos, su trazado se completará facilmente. Del mismo modo, los dientes del piñon necesitarán una estension de flancos igual á cm los cuales se prolongarán para formar los cóncavos y resultaran de una magnitud An mas el huelgo nr, y por este punto r deberá pasar el arco dr concentrico al círculo primitivo que terminará el fondo de los cóncavos. Este mismo círculo primitivo pudiera terminar los estremos de los dientes del piñon pero se adopta otro un poco mayor para asegurar la continuidad del movimiento, y por esta misma causa es necesario formar un pequeño cóncavo como de 0,m01 de profundidad en la barra por dos líneas verticales tangentes á las cicloides, y una horizontal para fondo de dicho cóncavo. Además se redondean siempre las aristas estremas de los dientes como se indica en la figura en el H.

21. Si fuese el piñon el que tuviese que conducir á la barra, seria preciso que sus dientes llevasen caras, y los de la barra, flancos (fig.ª 85).

Se elegiria, pues, siguiendo el procedi-

miento general por curva exterior, la evolvente A M de círculo engendrada por el movimiento del punto A de la recta primitiva A I rodando sobre la circunferencia O'. La curva conjugada de esta evolvente se reduce evidentemente al mismo punto A (11); y por consiguiente los flancos se reducen tambien á este mismo punto y la línea de los contactos sucesivos será la misma A I. Hecha la division ordinaria de los dientes y cóncavos, se tendrá en la recta A I la posicion del último contacto m y por tanto la longitud de curva c m necesaria para la conduccion.

El resto del trazado se hará como en el caso anterior, formando los cóncavos de la barra por medio de dos rectas verticales A E, B D, y la horizontal E D para el fondo, á la distancia A r + r E determinadas como ya sabemos. Análogamente se hará una ligera entalladura en la rueda para alojar con holgura el esceso de longitud dada á los dientes que tendrán la forma representada en la figura.

Engranage simétrico y recíproco de rueda y barra dentada.

22. Este caso que es el que mas generalmente tiene lugar en la práctica para esta clase de engranages, no es mas que la reunion de los dos anteriores, pues habiendo de verificarse la con-

duccion, ya por la barra, ya por el piñon, es preciso que los dientes de cada una tengan caras y flancos, que resultarán de la agregacion de las curvas anteriores. Es inutil, por tanto, insistir en mas detalles sobre este trazado representado en la figura 86, y al cual son aplicables las observaciones hechas en los números 16 y 17.

Engranages interiores de epicicloides.

23. Cuando uno de los círculos primitivos está dentro del otro, el trazado se hace tambien por la aplicacion del principio general establecido en el núm.º 11.

Si ha de ser conductriz la rueda O (fig.ª 87) el piñon deberá tener dientes con flancos rectilíneos; por consiguiente, las curvas en este caso serán las epicicloides engendradas por el círculo C' cuyo diámetro es igual al rádio A O' del piñon, rodando interiormente sobre los dos círculos primitivos. Verificándose la conduccion durante el espacio A c igual al paso, el punto m será el último contacto; y los dientes de la rueda terminarán por un arco cuyo radio sea un poco menor que Om; y los cóncavos por otro arco dr cuyo radio Or sea igual á $O'A - (An + 0^{m}005)$ proximamente. El trazado se completará como en los casos anteriores.

34 Si hubiese de conducir el piñon á la rueda, esta tendria dientes con flancos rectilíneos y aquel dientes con caras: siguiendo el mismo método general (11) el círculo generador de estas líneas seria aquel cuyo diámetro fuese igual al radio A O de la rueda. Pero este engranage no puede construirse en la práctica y no tiene aplicacion sino modificándole segun indicarémos.

En efecto, construida la epicicloide a M (figura 88) y el flanco Bm, el lugar de los contactos de estas líneas indica que en la curva esterior empieza en la raiz a y acaba en m, y en el flanco empieza en el punto B y acaba en el mas interior m; pero estas dos líneas colocadas en posicion anterior á la línea de los centros b'M', B'd' se penetrarian antes que pudiesen conducirse, en razon á que para arcos iguales AB', ab', el flanco correspondiente B'd' corta al círculo del piñon en un punto d' tal que el arco ad' resulta mayor que el ab', por consiguiente no pueden emplearse estas líneas para el trazado de este engranage. Tienen ademas el inconveniente de que no puede prestarse esta solucion á la combinacion con la de la figura anterior para que el engranage fuese recíproco, porque los flancos rectilíneos B d de los dientes de la rueda (figª 88) no pueden existir simultaneamente con las caras A M que

tenian en la figura 87.

Por estos inconvenientes se ha modificado el trazado para el caso en que el piñon haya de ser conductor, eligiendo para curva de sus dientes la epicicloide que describe el circulo primitivo O de la rueda, rodando sobre el del piñon, y claro es que los flancos de la rueda se reducen á un solo punto que es el mismo generador rodando la circunferencia anterior sobre si misma. El lugar de los contactos estará siempre en esta misma circunferencia primitiva, y solo habrá que hacer los cóncavos necesarios en la rueda, prolongando los radios exteriormente á dicha circunferencia. Como este trazado se combina ordinariamente con el de la figura 87, omitimos representarle en figura separada, pero formará parte de la solucion del problema mas ordinario en este caso, que es el siguiente.

Engranage interior simétrico y reciproco de epicicloides (fig.ª 89).

25. Se construiran los dientes de la rueda y los flancos del piñon como en el num.º 22, tomando por circulo generador de las epicicloides el C' cuyo diámetro es igual al rádio del circulo O' del piñon. En seguida se tomará por circulo generador segun acabamos de indicar el mis-

mo circulo primitivo O de la rueda; y dará para curva de los dientes del piñon las epicicloides A M' y para flancos, el mismo punto generador. No habrá, pues, mas que repetir las construcciones ya detalladas en ejemplos anteriores para marcar la estension de caras y flancos en cada rueda, así como los cóncavos para alojar los dientes, cuyas construcciones estan indicadas en la fig.ª 89 y es inutil insistir mas acerca de ellas. La conduccion empezaria en el punto m' antes de la línea de los centros y terminaria en el m.

Engranages de linternas.

26. Se llama linterna una especie de tambor, (fig.ª 90) compuesto de platillos circulares iguales, paralelos y unidos por cilindros rectos llamados husillos, cuyas bases son los círculos c c' c''; los centros de estos pequeños círculos están situados en la circumferencia del círculo primitivo de esta especie de rueda, y la figura 90 representa un corte dado entre los dos platillos por un plano que les es paralelo. Esta linterna puede ser conducida por una rueda ó por una barra dentada. Esta clase de engranages no se emplea sino para fuertes máquinas en que no hay necesidad de gran precision en los movimientos, porque no ofrecen

tanta suavidad y regularidad como el engranage de flancos. Los dientes de estas ruedas suelen ser de madera y ensamblados en la corona, en cuyo caso se suelen llamar erizos á estas ruedas. Los husillos, como se desgastan mas pronto por el rozamiento, suelen ser de hierro ó madera muy dura.

Fijados, como siempre, el número de dientes m y m' conforme al número 164 se dividirán los círculos primitivos O y O' en partes iguales al paso A A', A a', y hecha la subdivision del espesor y cóncavo de estos dientes en la forma ordinaria, se trazarán los husillos c, c', c'', con radios iguales al semi-espesor de los dientes. Si los husillos se redujesen á sus centros, la curva envolvente de todas las posiciones que tomaria uno de ellos en su movimiento relativo sobre el círculo O, seria la epicicloide cH engendrada por dicho punto; por consiguiente, para tener la envolvente de las posiciones del husillo ó del círculo c, no habrá mas que tirar normales á la epicicloide cH y tomar sobre ellas, magnitudes iguales al radio del husillo, ó lo que es lo mismo, describir diferentes arcos de círculo con dicho radio desde los puntos de la epicicloide h, h', h'' y la curva A M envolvente de todos ellos será la que se empleará para cara

de los dientes de la rueda. Los contactos tendrán lugar en los puntos de interseccion de las normales Ac, con las circunferencias de los husillos, y la porcion de curva necesaria para que cada diente conduzca un arco igual al paso, se determinará como siempre, marcando el último contacto m y trazando un arco m h' concéntrico á O para terminar los dientes. Los cóncavos de la rueda, bastaria que fuesen semicírculos S de diámetro igual á la cuerda del arco AB para alojar los husillos con holgura, pero lo mas frecuente es seguir el procedimiento general de trazar las porciones de rádios AD, BE un poco mayores que el rádio de los husillos y terminar el fondo del cóncavo por un arco ED concéntrico con el círculo O.

Por la construccion de este engranage se ve que no puede conducir la rueda sino despues de la línea OO' de los centros, y por lo tanto, las linternas no podrian ser conductrices sino en espacios anteriores á la línea de los centros como sucederia suponiendo que girase en sentido inverso de la flecha; disposicion que segun hemos indicado no es admisible en la práctica

Las linternas podrian ser conducidas por barras dentadas y su trazado no diferiria apa-

nas del que acabamos de exponer combinándole con las construcciones detalladas en los números. 20-22

La inspeccion de la figura 91 relativa á este caso basta para darlas á conocer. La curva cH seria una cicloide engendrada por el punto c, y debiendo ser la cara del diente una curva equidistante de esta cicloide, se construiria como envolvente de los arcos de círculo trazados desde h, h' como en el caso anterior.

Engranages de evolventes de círculo.

27. Segun indicamos en el num.º 8 se emplea otra solucion del problema de los engranages, adoptando para curvas de los dientes, evolventes de círculo: solucion que segun veremos no tiene los inconvenientes de las epicicloides.

Está fundada en la construccion siguiente:

Por el punto A (fig.ª 92) que divide la línea de los centros OO' en dos partes recíprocamente proporcionales á las velocidades de que han de estar animadas las ruedas, se tira una línea T'AT inclinada respecto de OO': despues por los puntos O y O' se bajan las perpendiculares OT O'T' á dicha línea, y se describen dos círculos Tm, T'n cuyos rádios sean dichas perpendiculares. La línea TT' será evidentemente una tangente comun á las

dos circunferencias, y si se arrollan las partes AT y AT' respectivamente sobre las circunferencias OT, OT', el punto A describirá las evolventes m M, n N de uno y otro de estos círculos.

Suponiendo ahora que una de estas curvas conduzca á la otra segun la direccion de la flecha, la presion se ejercerá segun la normal comun en todas la posiciones de las curvas m M, n N y como las normales á cada una de ellas deben ser siempre tangentes al círculo desarrollado, es evidente que la normal que sea comun á ambas curvas, será siempre la tangente TT'. Así en este engranage, el punto de contacto estará siempre sobre esta misma normal, y por consiguiente, el esfuerzo ejercido sobre uno de los dientes será constante mientras dure su contacto.

Resulta pues, que estas evolventes son curvas conjugadas, pues que la normal comun pasa siempre por el punto de contacto A de los círculos primitivos, y satisfarán por consiguiente al conducirse, á la condicion de que pasen arcos iguales de los círculos primitivos en un mismo tiempo. Esto se comprueba directamente, observando las dos posiciones inmediatas m' M', n' N' de las curvas en que la longitud de los arcos m m', n n'

será evidentemente igual á la parte Ar de la normal comun, segun la ley de generacion de estas curvas; por consiguiente iguales entre sí; y como los arcos correspondientes de los círculos primitivos que habran pasado en el mismo tiempo serán proporcionales á los anteriores puesto que lo son sus rádios respectivos con los OT, O'T', resultarán tambien iguales dichos arcos, y la ley del movimiento será la que debe tener lugar en los engranages.

Terminando los dientes de estas ruedas por dos curvas simétricamente colocadas respecto del rádio que pasa por la mitad del espesor de los dientes podrán conducirse en ambos sentidos; y como además cada uno de los dos dientes tiene caras y flancos, formando una misma curva, la conduccion de las ruedas será recíproca, y por lo tanto se verificará antes y despues de la línea de los centros. Si se quisiera limitar la conduccion solo despues de dicha línea, claro es que bastaria (7) suprimir la parte Am de curva que es interior al círculo primitivo de la conductriz, y la exterior AN, al círculo primitivo de la conducida.

En el caso ordinario de que la conduccion haya de ser antes y despues de la línea

de los centros en espacios iguales al paso del engranage se arreglará á esta condicion la parte de curva que haya de formar los dientes y la inclinacion que deba darse á la línea TT', que conviene no sea muy notable para que las curvas que forman cada diente no converjan muy rápidamente y queden debilitados hácia sus extremos.

Para determinarla, se tomará, pues, desde el punto de contacto A sobre el círculo primitivo del piñon, un arco Ac igual al paso, se tirará el rádio O'c, y del punto A se bajará sobre O'c una perpendicular que será la tangente comun buscada AT'. Es claro, en efecto, que llegado el diente del piñon á una distancia igual al paso, será tocado en su primer elemento y no podrá serlo mas adelante. Convendrá, por otra parte, tomar la inclinacion de la tangente un poco mayor que este límite, cuando pueda hacerse sin que los dientes se debiliten mucho en sus extremos, á fin de asegurar mas la conduccion hasta el punto marcado.

La longitud total de los dientes se terminará facilmente trazándolos en las posiciones extremas que deban tener antes y despues de la línea de los centros, y cortándolos á esta distancia por arcos de círculos concéntricos á los de las ruedas. Aunque los dientes no tienen flancos rectilíneos, es necesario prolongarlos en su naci

miento por medio de dos radios tangentes que limiten los cóncavos dando á estos la profundidad conveniente para el juego del engranage.

28. Los inconvenientes que hicimos notar (17) en los engranages de epicicloides no subsisten en los de evolventes, los cuales, por el contrario, presentan varias ventajas como son:

1.ª Que el espesor de los dientes es mayor en su raiz como conviene para su mayor resistencia, aunque esto está compensado por un inconveniente que ya hemos mencionado y es, que convergiendo muy rápidamente las curvas hácia el extremo de los dientes, especialmente en ruedas de pequeños radios, se debilitan mucho é impiden que pueda conducir cada diente, espacios angulares tan grandes como en los de epicicloides.

2.ª Si la colocacion primitiva de las ruedas sufre un pequeño cambio, la conduccion se verifica en las mismas condiciones que antes. En efecto, si suponemos que el centro O (fig.ª 92) bajase un poco, así como el círculo OT, la tangente comun TT' cambiaría de inclinacion y cortaría á la línea de los centros OO' en un punto (A' por ejemplo) inferior al A; pero es claro que las curvas subsistirian las mismas y la relacion de las distancias OA', O'A' seria siempre la inver

sa de las velocidades angulares; únicamente las curvas de los dientes estarian en contacto en puntos diferentes que al principio para espacios angulares iguales de los círculos primitivos.

3.ª Que una misma rueda puede conducir piñones de diferentes rádios, porque sus dientes serán siempre evolventes de un círculo que se determinará trazando la tangente comun bajo una inclinacion determinada por la condicion de que pueda conducir cada diente dela rueda al piñon de menor diámetro, una distancia igual al paso del engranage; esta inclinacion marcará la estension de arco de círculo que habrá que desarrollar y por consiguiente la delas evolventes necesaria para conducir diferentes piñones, para los cuales se conservaria la tangente comun anterior, es decir, de igual inclinacion respecto dela línea delos centros.

Ruedas de álaves.

29. Esta clase de ruedas se emplea principalmente para comunicar movimientos intermitentes, ya á un martinete, ya á un pilon. El número de álaves de estas ruedas es muy pequeño pero sus dimensiones son muy grandes relativamente á las delos dientes de engranages aunque su trazado está sujeto á la misma ley geométrica que estos.

Así los álaves de una rueda C (figª 93) animada de un movimiento de rotacion continuo, destinados á comunicar otro alternativo á una palanca C't alrededor del centro C', tendrán la forma de una epicicloide engendrada por un punto de un círculo cuyo diámetro fuese C't rodando sobre el círculo Ct de la rueda, siendo siempre este punto t el que divide la distancia CC' en dos partes recíprocamente proporcionales á las velocidades angulares de los ejes. Esta curva obrará sobre un flanco rectilíneo dirigido segun C't, y conducirá á partir de la línea de los centros.

3o. Si los álaves estuviesen destinados á levantar un pilon ó producir un movimiento rectilíneo, el diámetro C't sería infinito y la curva a (figª 94) del diente ó álave sería una evolvente de círculo. Conociendo en este caso la altura á que deba elevarse el pilon, y la porcion de la circunferencia correspondiente á este contacto, se deducirá fácilmente el radio del círculo que hay que desarrollar para producir el movimiento dado. Habrá que dar á la curva una especie de flanco para que deje pasar con libertad á la varilla del pilon, haciendo el oficio de cóncavos.

Como se ve, estos casos particulares están comprendidos en las soluciones generales que preceden.

Dimensiones y número de los dientes de los engranages.

31. El procedimiento empleado en el número 14 y siguientes para trazar los engranages, supone conocido el paso, y este está en relacion con las proporciones que ordinariamente se dan á los dientes en la práctica; por lo tanto importa conocerlas.

La anchura de los dientes paralelamente al eje de rotacion suele ser igual á cuatro veces su espesor medido en la circunferencia primitiva, cuando la velocidad en esta circunferencia no excede de $1^{m},50$. Llega á ser de cinco veces dicho espesor cuando la velocidad es mayor, para compensar los efectos del mayor desgaste. En fin, cuando los dientes del engranage estan espuestos á mojarse y á ser atacados por la arena que aumente su desgaste se les da una anchura hasta de seis veces el espesor.

La parte saliente de los dientes sobre su corona está determinada por el trazado (13) cuando se dá el espacio angular que han de conducir. Sin embargo, como la resistencia á la rotura está en razon inversa de esta longitud, no debe pasar de ciertos límites. Conviene que no exceda 1,5 veces el espesor; ó si el trazado exige mayor saliente, habrá que

examinar si se puede disminuir algo el espesor aumentando la anchura y así disminuirá el paso, y por consiguiente la longitud del diente. Pero si esto no basta habria que limitar la conduccion de cada diente á la distancia que permitiese este máximo de longitud, lo cual en los engranages recíprocos no impediria la continuidad del movimiento (17).

Hay un medio de limitar cuanto se quiera esta conduccion que es hacer las ruedas de dos ó mas órdenes de dientes. Para formar idea de una rueda de esta clase, basta imaginar que se corta por planos perpendiculares al eje, quedando los dientes divididos en su anchura, y que gira cada porcion de rueda un espacio angular relativo, viniendo á formar los dientes de cada rueda una especie de grada, y los contactos van teniendo lugar en porciones cortas de las generatrices de los cilindros que forman los dientes. Esto ha dado origen á los engranages llamados de precision, de cuya teoria se ha ocupado M. Olivier; en los cuales, suponiendo infinito el número de planos que dividen la anchura de las ruedas, la série de escalones que formaban antes los dientes, se convierte en una superficie contínua que estaria en contacto en un solo punto para cada posicion, con la correspon-

diente dela otra rueda. Esta circunstancia es causa de que se desgasten rápidamente y no puedan aplicarse á trasmitir grandes esfuerzos; porlo que no entraremos en mas detalles acerca de su trazado.

32 Tambien pudiera suceder que sin exceder la longitud ó saliente delos dientes delos límites asignados, el espesor y el paso tengan tal dimension que al determinar por el procedimiento del número 13, la porcion de curva necesaria para la conduccion, y construida la rama simétrica que forma el contorno lateral del diente, se corten estas dos curvas en un punto mas bajo que el punto m (figª 80) en cuyo caso tampoco podria prolongarse la conduccion en el espacio angular ac, y seria necesario disminuirle por uno de los medios indicados anteriormente

Se sigue de aquí que el número m' de dientes de la rueda menor, es susceptible de un mínimo si se ha de verificar la conduccion en todo el paso del engranage, mínimo que varia con la naturaleza de las curvas y con la relacion de los radios ó de las velocidades angulares. M. Savary ha determinado por el calculo, la posicion del punto m pie de la normal extrema am y ha hallado los límites siguientes, en que r representa

la relacion $\frac{R'}{R}$ que es siempre menor que la unidad.

En engranages de epicicloides
y flancos rectos .... $n' = 0'> 10 (1 + \mu)$
En engranage de linternas .... $n' = 0'> 7 + 4\mu$
En engranages de evolventes ... $n' = 0'> 16 + 2\mu$
fórmulas que pueden servir para evitar el tanteo preliminar que exige la construccion gráfica de los números 14 y siguientes para determinar si la extension de curva para un paso dado, escede ó no del punto de concurso de las curvas de un mismo diente.

33. Establecidas las proporciones indicadas entre la anchura y salida de los dientes con su espesor, no queda mas que determinar este, y segun la práctica seguida por los mejores constructores, puede deducirse por las fórmulas siguientes en las cuales se representa por e el espesor en centímetros, y por P el esfuerzo en Kilógramos ejercido por una rueda sobre otra.

Para dientes de hierro fundido $e = 0,105 \sqrt{P}$.
" id. id. bronce ó cobre .... $e = 0,131 \sqrt{P}$
" id. encina, raiz de peral y de serbal $e = 0,183 \sqrt{P}$

Llamando ademas,
l la anchura en centímetros
s la salida ó longitud, se tendrá segun los

casos mencionados arriba;

$l=4e$, $l=5e$, ó $l=6e$; y $s=1,50e$ á lo mas.

El paso a del engranage será (44) para un huelgo de $\frac{1}{10}$ del espesor

$$a = 2,1e$$

Si los dientes de una de las ruedas fuesen de metal y los de la otra de madera, el espesor e' de estos últimos respecto de los primeros estaria en la relacion $\frac{e'}{e} = \frac{183}{105} = 1,74$;
el paso seria seria en este caso

$$a = e' + e + 0,1e = (1,74+1,1)e = 2,84e$$

y la anchura l para ambas ruedas, se haria $l = 4e'$.

Cuando los dientes son de metal, se funden ordinariamente en una pieza con la corona de la rueda; la cual tiene la misma anchura que los dientes paralelamente al eje, y su espesor en sentido del radio es tambien igual al espesor e de los dientes.

Si estos son de madera sujetos á una corona de hierro, esta presenta cajas cuya anchura segun el eje es igual á la de los dientes y la de la corona excede á esta en el espesor de los dientes por cada lado de la caja. En el sentido del rádio, su espesor es el mismo de los dientes.

Con arreglo á estas bases se pueden determinar las dimensiones de los engranages

en los casos en que no esten espuestos á choques.

Nociones generales sobre los engranages cónicos.

34 Cuando los ejes de las dos ruedas de un engranage no son paralelos sino que se cortan, el engranage se llama cónico ó de ángulo.

Su trazado guarda completa analogia con el del engranage plano segun haremos observar.

Sean SC, SC' los ejes de las ruedas (figª 95) y w y w' las velocidades angulares correspondientes. Los radios CT, $C'T$ de los círculos primitivos debiendo hallarse en razon inversa de w y w', para determinarlos se habrá de satisfacer á la condicion

$$\frac{CT}{C'T} = \frac{w'}{w} \; ; \text{ ó } \frac{ST \operatorname{sen} \alpha}{ST \operatorname{sen} \alpha'} = \frac{w'}{w} \, , \text{ ó } \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha'} = \frac{w'}{w}$$

Bastará pues dividir el angulo dado CSC' en dos angulos α y α' cuyos senos esten en relacion de $\frac{w'}{w}$. Haciendo girar estos ángulos alrededor de los ejes respectivos SC, SC' se tendrán los conos primitivos. tocándose segun la arista comun ST. El movimiento deberá comunicarse á los ejes por el contacto de los dientes, como si rodasen los conos primitivos uno sobre otro. Sobre las bases circulares OO' (figª 96) de estos conos tomados en el medio

de la anchura de la corona, se hace ordinariamente la division del engranage.

Se tomará, pues, por círculo auxiliar el O'' cuyo diámetro sea igual al rádio del O' y haciéndole rodar sobre el círculo fijo O con la misma inclinacion, engendrará una epicicloide esférica m m'' que se tomará por directriz de un cono epicicloidal que tenga el mismo vertice S que los conos primitivos, y servirá para cara del diente de la rueda O. El flanco de la O' estará determinado por el plano de las rectas O'm', O'S que será tangente al cono epicicloidal en todas las posiciones, y el plano normal comun á estas superficies pasará siempre por la generatriz de contacto S M de los conos primitivos, es decir, que estará determinado por esta generatriz y por la normal M m'' comun á la epicicloide m m'' y al flanco m'O'. La conducción antes del plano diametral OO'S se verificará por superficies análogas, tomando por círculo auxiliar el que tuviese por diametro el rádio del círculo O y situado en su mismo plano.

Se vé, pues, que existe una completa analogia entre las construcciones hechas en un plano para el trazado del engranage cilíndrico y las hay que trasladar al

espacio en el engranage cónico; por lo tanto no entraremos en detalles relativos á los casos particulares. Toda la dificultad consiste en las operaciones gráficas necesarias para trazar las diferentes curvas y superficies de los dientes conforme á los principios de la geometría descriptiva; pero el trazado rigoroso que así resultase aplicando, por ejemplo, los métodos idicados en la obra de M. Hachete, no sería muy exacto en razon á la multiplicidad de construcciones auxiliares que exige para obtener los puntos de la curva que sirve de directriz á los conos epicicloidales de los dientes y la representacion de las superficies de estos. Por lo que se prefiere emplear en la práctica un procedimiento mas sencillo y suficientemente exacto como vamos á exponer.

39. Se observará ante todo que las coronas que llevan los dientes deben estar terminadas por el lado opuesto al vertice S (fig.ª 97) de los conos por otras superficies cónicas m n p T, m' n' p' T' normales á las primitivas cuyos vertices S, S' estan sobre los ejes S C y S' C' de las ruedas, y cuyas aristas S, T, S' T comprendidas en el plano de estos ejes son perpendiculares á la arista de contacto S T de los conos primitivos, de suerte que estan en prolongacion una de otra. Se hallarán pues comprendi-

das en el plano tangente comun á los dos conos S, S' normales á los conos primitivos. Pero este mismo plano tangente es perpendicular á la arista de contacto ST. En efecto, los planos de las bases TC, TC' se cortarán segun una recta proyectada en T, tangente á ambas bases y perpendicular al plano SS,S'; luego será tambien perpendicular á la recta ST situada en dicho plano; pero la ST es tambien perpendicular á la generatriz S, S'; luego lo será al plano determinado por esta generatriz y la tangente á las bases proyectada en T; cuyo plano es precisamente el plano tangente á los dos conos S, S'; puesto que contiene á la generatriz S, S' y á la tangente T: luego la arista ST es perpendicular al plano tangente comun á los dos conos S, S'.

Este plano, se halla, pues, respecto á la generatriz de contacto ST en las mismas condiciones que el plano de los circulos primitivos del engranage cilíndrico respecto á la arista de contacto de los dos cilindros que tienen por bases dichos circulos. Por lo tanto se podrá hacer el trazado de las curvas en el plano S, T S' como si perteneciese á las mismas superficies cónicas con las cuales tiene un elemento superficial comun.

cuando ellas se conducen en T en que tiene lugar su contacto mútuo.

Esto supuesto, se desarrollarán las dos superficies cónicas S, S' (fig.ª 98) sobre el plano tangente comun de que se trata, lo que no ofrece dificultad pues que se tienen las longitudes de las aristas y el perimetro de las bases pues to que en este desarrollo las longitudes en el sentido de las aristas, y las anchuras en el sentido de los círculos meridianos concéntricos á los vértices no varian. Se referirá así el problema de los engranages cónicos al de los engranages cilíndricos ó sobre un plano, porque los círculos primitivos situados en los conos habran venido á ser en el desarrollo, arcos de círculos tangentes entre sí, que se podrán considerar como los círculos primitivos de las dos ruedas planas, y en ellos se verificarán las construcciones segun la clase de engranage que se quiera adoptar. Se obtendran de este modo todas las plantillas necesarias para trazar los dientes sobre las superficies de los conos límites S, S' con las que se construirán facilmente los dientes.

Se podria tambien preparar una nueva plantilla desarollada aplicable á la superficie cónica que termina interiormente la corona del lado del vertice S, la cual tiene

sus aristas paralelas á las de los primeros conos límites, en cuya plantilla tendrian los dientes figuras enteramente semejantes á las primeras, de manera que bastaria reducir estas en la relacion determinada por las longitudes de las aristas ST y ST'.

Engranage de rosca sin fin.

36 En el caso particular de cruzarse perpendicularmente los dos ejes de las ruedas puede emplearse como conductriz una rosca sin fin siguiendo en su trazado una marcha análoga á los engranages de barra dentada.

Sean O y DE (fig.ª 99) los dos ejes. Por el segundo hagamos pasar un plano perpendicular al primero, y tracemos en él un círculo con centro en O y un rádio OA igual al círculo primitivo de la rueda que supondremos conocido y que se determinará segun manifestaremos despues. Tirando por A una recta AL tangente á dicho círculo y paralela á DE, consideraremos este engranage como el de una rueda y barra dentada, siendo conductriz esta última, (20) por lo que su trazado nos determinará para caras de los dientes, las cicloides AM engendradas por un punto del círculo ausiliar O' y para flancos de la rueda las rectas AN. Comple-

tado este trazado, conociendo de antemano el paso del engranage, supongamos que en el cilindro recto de radio AG se traza por el punto A una hélice cuyo paso sea igual al del engranage. Es claro que esta hélice cuando gire el cilindro alrededor de su eje ED haria avanzar al punto A del círculo O, una distancia igual á este paso, si se hallase siempre en contacto con él; por consiguiente, si la tomamos por directriz del movimiento de la seccion AMB de un diente alrededor del eje ED engendrará un filete saliente sobre el círculo primitivo compuesto lateralmente de superficies helizoidales, que en todas sus posiciones serian tangentes á las que tomaria el plano AN del flanco que estará inclinado respecto á la cara del piñon.

Tal es la forma de este engranage, en el cual se desarrollan grandes rozamientos en las superficies en contacto, y además se desgastan estas muy pronto, por lo que solo se emplean para trasmitir pequeños esfuerzos.

Segun se infiere de este trazado la relacion de las velocidades angulares de los ejes si bien es constante, es independiente de la de los radios de la rueda y de la rosca.

Para hallar aquella relacion, basta observar que á cada revolucion de la rosca correspon de en el piñon un arco igual al paso a del engranage; por consiguiente, llamando w la velocidad angular de la rosca, y w' la del piñon, se verificará

$$\frac{w}{w'} = \frac{2\pi R}{a},$$

de la cual se deducirá el valor del radio R que ha de darse al círculo primitivo del piñon, conocido el paso a y la relacion $\frac{w}{w'} = n$; siendo n el número de vueltas que ha de hacer la rosca, por cada una del piñon.

Del rozamiento de los engranages (a)

Consideraciones preliminares.

37. Antes de indicar la marcha que hay que seguir para calcular la cantidad de trabajo desarrollada por el rozamiento de los engranages, vamos á esponer algunas consideraciones preliminares en que está fundada.

Consideremos dos rodillos cilíndricos C y C' (fig.ª 100) que se tocan en m y estan comprimidos uno sobre otro por una fuerza N. Si el rodillo C rueda sobre el rodillo C', supuesto inmóvil sobre su eje, ó si ruedan simul-

(a) Traduccion de la Mecánica aplicada á las máquinas de M. Poncelet, omitiendo alg.s números.

táneamente uno sobre otro, desarollando en su contorno arcos iguales, no se producirá sino un rozamiento de rodadura que se podrá despreciar en la mayor parte de los casos, y sobre todo en el de los engranages ordinariamente formados de cuerpos poco compresibles. Pero si en lugar de rodar el cilindro C resbala, se sobre C' que se supone inmovil, se producirá en el punto de contacto, un rozamiento de resbalamiento fN, y si se designa por ds el camino elemental mm' recorrido en dt, este rozamiento desarollaria una cantidad de trabajo elemental medida por $fNds$.

Si el rodillo C' en lugar de estar inmóvil, girase alrededor de su eje en el mismo sentido que C y si el arco $mm''=ds'$ fuese el recorrido en el elemento dt por el punto m, es claro que los dos cilindros habrian rodado uno sobre otro, pero al mismo tiempo deslizando una cantidad $mm'-mm''=ds-ds'$. Asi el camino recorrido por el punto de aplicacion de la resistencia á la rodadura, seria, para los dos rodillos, igual al menor de los dos arcos mm' y mm'', y el camino recorrido por el punto en que se ejerce el rozamiento de resbaladura, seria la diferencia de estos dos arcos. Por consiguiente, la cantidad de trabajo elemental desarollada por este segundo

rozamiento, estaria medida por $fN(ds-ds')$ considerando el del rozamiento de rodadura como despreciable respecto del otro.

En fin, si el rodillo C' en lugar de girar en el mismo sentido que C, marchase en sentido contrario, es claro que no habria rodadura, y que si hubiera descrito en este sentido un arco elemental $mm_1 = ds'$, el camino recorrido por el punto de aplicacion del rozamiento directo, en esta desviacion simultánea de dos rodillos, seria $mm' + mm_1 = ds + ds'$ y que por consiguiente el trabajo desarrollado por esta resistencia, en sentido contrario del movimiento estaria medido por

$$fN(ds+ds')$$

Concluyamos de aquí que, segun que en el movimiento de las curvas de estos rodillos, una sobre otra, el punto de contacto primitivo se halla sobre cada una de ellas de un mismo lado del nuevo punto de contacto ó de un lado opuesto, el trabajo desarrollado por el rozamiento de deslizamiento, deberá estar expresado por

$$fN(ds-ds'), \text{ ó por } fN(ds+ds')$$

38. Esto supuesto, sean amb, $a'mb'$ (fig.ª 101) dos curvas de dientes, que satisfacen á la condicion geométrica del trazado, que su normal comun pase por el punto de con-

tacto t de los círculos primitivos; y supongamos que, á causa de una desviacion infinitamente pequeña vengan á tocarse en un nuevo punto m,

Sean tambien $Ct = R$ el radio del círculo primitivo, cuyo centro es C,
$C't = R'$ id. de id. cuyo centro es C',
$tCm = \theta$; $tC'm = \theta'$ los ángulos descritos en el instante que consideramos á partir de la línea de los centros CC';
N la presion normal de uno de los dientes sobre el otro.

Considerando á las curvas en las nuevas posiciones correspondientes al contacto en m, refiramos por arcos de círculo $m\,m'$ y $m\,m''$ descritos de los centros C y C', el punto m del contacto anterior sobre estas curvas.

Es claro, por la simple inspeccion de las figuras 101 y 102 que si el punto m de contacto se halla, para la posicion que se considera, mas próximo al punto t que el medio de la cuerda (fig.ª 101) formada por la prolongacion de la línea tm, los dos puntos m' y m'' se hallarán de un mismo lado de m, y por el contrario, si este punto está mas allá del medio de esta cuerda (fig.ª 102) el punto m' se hallará de un lado de m, y el m'' del otro; por consiguiente en el

primer caso el camino elemental recorrido en sentido del rozamiento de deslizamiento, ó de la tangente comun á las dos curvas, será $m_1m' - m_1m''$ y en el segundo $m_1m' + m_1m''$. Pero se observará al mismo tiempo, que en el primer caso esta tangente comun pasará entre los dos centros C y C', y que en el segundo los dejará á los dos á un mismo lado. Esta observacion es importante á causa de los cambios de signo que de ella resultan para ciertas cantidades.

Vamos á examinar desde luego el primer caso, y haremos ver en seguida que el segundo conduce á los mismos resultados.

Proyectemos los arcos elementales m_1m' y m_1m'' sobre la tangente comun en m á las dos curvas; las longitudes mm_1' y mm_1'' serán iguales á los arcos proyectados, atendiendo á que la desviacion se supone infinitamente pequeña. Ahora bien, en los triángulos $mm'm_1'$ y $mm''m_1''$ rectangulos en m_1' y m_1'' se tiene

$$mm_1' = mm' \cos m'mm_1' \quad \text{y} \quad mm_1'' = mm'' \cos m''mm_1'' ;$$

y como tm es perpendicular á la tangente comun ó á mm_1' y mm_1'' y que Cm y $C'm$ lo son respectivamente á mm' y mm'' se tiene

$$\cos m'mm_1' = \cos Cmt; \; \text{y} \; \cos m''mm_1'' = -\cos C'mt$$

Además $\quad mm' = Cm\,d\theta \;$ y $\; mm'' = C'm\,d\theta$.

por consiguiente el camino recorrido por el punto de aplicacion del rozamiento tiene

por espresion

$$m\,m_1' - m\,m_1'' = Cm \cos Cmt\, d\theta + C'm \cos C'mt\, d\theta'$$

Prolonguemos la tangente comun por ambos lados y desde los centros C y C' bajemos sobre esta línea las perpendiculares Cp y $C'p'$; tendremos por los triángulos Cmp y $C'mp'$

$$Cp = Cm \cos mCp = Cm \cos tmC;\ C'p' = C'm \cos mC'p' = -C'm \cos C'mt$$

y por consiguiente

$$m\,m_1' - m\,m_1'' = Cp\,d\theta - C'p'\,d\theta',$$

pero se tiene por otra parte á causa de los triángulos CSt y $C'S't$, y llamando n la longitud de la normal tm

$$Cp = n + Ct \cos tCp = n + R \cos tCp$$

$$C'p' = C't' \cos tC'p' - n = R' \cos tCp - n$$

y por consiguiente

$$m\,m_1' - m\,m_1'' = n(d\theta + d\theta') + \cos tCp\,(R\,d\theta - R'\,d\theta')$$

Pero, pues que las velocidades se trasmiten como si los círculos primitivos rodasen uno sobre otro, se tiene

$$R\theta = R'\theta' \quad \text{ó} \quad R\,d\theta = R'\,d\theta' \quad \text{y por consiguiente}$$

$$m\,m_1' - m\,m_1'' = n\,(d\theta + d\theta')$$

Acabamos de raciocinar suponiendo que el punto m se hallaba mas próximo de t que el medio de la cuerda formada por tm prolongada; hemos visto que en el caso contrario, el camino recorrido por el punto de aplicacion del rozamiento hubiera sido $-m\,m_1' + m\,m_1''$;

pero atendiendo á que entonces la tangente

comun en m deja los dos centros del mismo lado se tiene:

$$Cp = n + R \cos t\, Cp \quad y \quad Cp' = n - R' \cos t\, Cp'$$

y se sigue de aquí que se viene á hallar como antes

$$mm' + mm'' = mm_1' + mm_1'' = Cp\, d\theta + Cp'\, d\theta' = n(d\theta + d\theta').$$

Así en uno ú otro caso se llega á la misma espresion del camino elemental recorrido por el punto de aplicacion del rozamiento. La relacion $R d\theta = R' d\theta'$, dá

$d\theta' = \frac{R\, d\theta}{R'}$ lo que conduce á

$mm_1' - mm_1'' = n \frac{R + R'}{R'} d\theta$ en el primer caso y á

$mm_1' + mm_1'' = n \frac{R + R'}{R'} d\theta$ en el segundo.

Cantidad de trabajo elemental desarrollada por el rozamiento de los engranages en una desviacion infinitamente pequeña.

3.9 Como el rozamiento debido á la presion es fN, si se designa por f la relacion del rozamiento á la presion, se sigue que la cantidad de trabajo elemental desarrollada en dt por el rozamiento del engranage, tendrá en todos los casos por espresion

$$fNn \frac{R + R'}{R'} d\theta$$

Si llamamos Q el esfuerzo normal á la línea de los centros que es preciso ejercer tangencialmente á los círculos primitivos para vencer las resistencias que se oponen al movimiento de la rueda conducida, y φ el ángulo de la normal con la direccion de esta fuerza, tendremos

evidentemente

$$N \times CK = QR, \text{ ó}$$

$$N \cos\varphi = Q; \text{ de donde } N = \frac{Q}{\cos\varphi}$$

lo que dá para el trabajo elemental del rozamiento

$$fQn \frac{R+R'}{R'} \frac{d\theta}{\cos\varphi}$$

En esta espresion, la fuerza Q es generalmente conocida: es el esfuerzo medio que es preciso ejercer en la circunferencia primitiva de la rueda conducida para vencer todas las resistencias distintas del rozamiento del engranage; pero las cantidades n y φ varian con el ángulo θ, y es preciso en cada caso conocer su valor exacto ó aproximado en funcion de este ángulo para poder integrar esta espresion del trabajo elemental, y deducir de ella la cantidad de trabajo total desarrollada por el rozamiento del engranage durante el contacto de los dos dientes. Esto es lo que vamos á tratar de obtener, aplicando esta fórmula á las diversas formas de engranages empleados.

Aplicacion al engranage de epicicloides.

Empecemos por el engranage de epicicloides (fig.ª 79) de una rueda conductriz y un piñon; se tiene en este caso $\varphi = \theta'$, pues que la normal an es perpendicular al plano $O'n$ y además

$$n = R' \operatorname{sen} \theta',$$

por consiguiente, la espresion del trabajo elemen-

tal del rozamiento del engranage es

$$fQ\,\frac{R+R'}{R'}\,R\,\frac{\operatorname{sen}\theta' d\theta}{\cos\theta'} = fQR'\,\frac{R+R'}{R}\,\operatorname{tang.}\theta' d\theta'$$

á causa de $R\,d\theta = R'd\theta'$. Se sabe además que

$$\operatorname{tang.}\theta' = \theta' + \frac{\theta'^3}{3} + \&c.$$

y por consiguiente, siempre que el ángulo θ' sea bastante pequeño para que se pueda limitar al primer término de la série, se tomará

$$fQR'\,\frac{R+R'}{R}\,\operatorname{tang}\theta' d\theta' = fQ\,\frac{R+R'}{R}\,R'\theta' d\theta'$$

Integrando entonces desde $\theta' = 0$ hasta el valor de θ' que corresponde á la mayor separacion del punto n á partir de la línea de los centros, se tiene para el trabajo total desarollado durante este intérvalo por el rozamiento

$$fQ\,\frac{R+R'}{R}\,R'\,\frac{\theta'^2}{2}$$

Si los dientes se conducen antes de la línea de los centros, durante un intérvalo correspondiente á un ángulo θ'', se tendrá asimismo para el trabajo consumido en este periodo

$$fQ\,\frac{R+R'}{R}\,R'\,\frac{\theta''^2}{2},$$

y por consiguiente, para la amplitud total $\theta' + \theta''$ recorrida durante el contacto

$$fQ\,\frac{R+R'}{R}\,R'\left\{\frac{\theta'^2+\theta''^2}{2}\right\} = fQ\left(\frac{R+R'}{R}\right)R'\left\{\frac{(\theta'+\theta'')^2}{2} - \theta'\theta''\right\}$$

Ventaja que hay en que los dientes se conduzcan antes y despues de la línea de los centros.

40 Esta ultima espresion demuestra que para

una amplitud igual del contacto ó para un espacio angular dado $\theta'+\theta''$ es mas ventajoso bajo el punto de vista del trabajo consumido por el rozamiento, que los dientes se conduzcan antes y despues de la línea de los centros; pues que, si la conduccion no tubiese lugar sino antes ó despues de esta línea, el trabajo desarrollado por esta resistencia hubiera tenido por espresion

$$fQ\,\frac{R+R'}{R}\,R'\,\frac{(\theta'+\theta'')^2}{2}$$

como hemos visto anteriormente.

La cantidad $fQ\,\frac{R+R'}{R}\,R'\theta'\theta''$ sustractiva de la anterior indica la disminucion producida por la conduccion antes y despues de la línea de los centros: y como es evidentemente un máximo para $\theta'=\theta''=\frac{\theta'+\theta''}{2}$, siendo $\theta'+\theta''$ el ángulo total dado, se sigue que conviene, bajo el punto de vista que lo consideramos actualmente, hacer conducir las ruedas de engranages tanto antes como despues de la línea CC'.

Esfuerzo medio que hay que ejercer tangencialmente á la circunferencia primitiva para vencer el rozamiento de los engranages.

40 bis Importa muchas veces para la facilidad de los cálculos hallar el valor del esfuerzo médio tangencial en t a los dos círculos primitivos que desarrollaria una cantidad de trabajo suficiente para compensar la que consume el roza-

miento del engranage. Ahora, el camino recorrido desde la línea de los centros hasta la distancia angular θ' es $R'\theta'$ en sentido del esfuerzo medio buscado; tendremos, pues, llamando a el paso del engranage, supuesto igual á $R'\theta' = R\theta$, para el valor de este esfuerzo medio

$$fQ\frac{R+R'}{R}\cdot\frac{\theta'}{2} = fQ\,\frac{R+R'}{RR'}\cdot\frac{a}{2}$$

Si los dientes se conducen antes de la línea de los centros, en una cantidad angular θ'', y despues de esta línea en una cantidad θ', el camino recorrido por el esfuerzo medio buscado en su propia direccion, siendo $R'(\theta'+\theta'')$, se tendrá para el valor de este esfuerzo

$$\frac{fQ\frac{R+R'}{R}R'\left\{\frac{\theta'^2}{2}+\frac{\theta''^2}{2}\right\}}{R'(\theta'+\theta'')} = \frac{fQ\frac{R+R'}{RR'}\left\{\frac{R'^2(\theta'+\theta'')^2}{2} - R'^2\theta'\theta''\right\}}{R'(\theta'+\theta'')} = \cdots$$

$$\cdots\cdots fQ\,\frac{R+R'}{RR'}\left\{\frac{R'(\theta'+\theta'')}{2} - \frac{R'\theta'\theta''}{\theta'+\theta''}\right\}$$

Este esfuerzo medio es evidentemente menor que el esfuerzo medio necesario para vencer el rozamiento en el caso en que el angulo $\theta'+\theta''$ estuviese descrito de un mismo lado de la línea de los centros, porque este tendria entonces por valor

$$fQ\,\frac{R+R'}{R}\cdot\frac{\theta'+\theta''}{2}$$

En el caso en que $\theta'=\theta''$, lo que corresponde á la diferencia máxima, se ve que el esfuerzo medio que hay que ejercer cuando las dos ruedas se conducen antes y despues de la línea

de los centros es

$$fQ\,\frac{R+R'}{RR'}\cdot\frac{R'\theta}{2}=fQ\,\frac{R+R'}{RR'}\cdot\frac{a}{2}$$

si $R'\theta'=a$; y que en el que la condicion tuviese lugar enteramente despues de la línea de los centros á una distancia $R'(\theta'+\theta'')=2R'\theta'=2a$ seria

$fQ\,\frac{R+R'}{RR'}\,a$, es decir, doble del anterior.

En la mayor parte de los casos, el engranage, teniendo lugar antes y despues de la línea de los centros, adoptaremos para el valor del esfuerzo medio necesario para vencer el rozamiento, y que es preciso ejercer tangencialmente en los dos círculos primitivos en t,

$$fQ\,\frac{R+R'}{RR'}\,\frac{a}{2}=fQ\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\cdot\frac{a}{2}$$

Siendo el número de dientes m para la rueda de radio R, y m' para la de R', se tiene $ma=2\pi R$; $m'a=2\pi R'$, de donde $\frac{a}{2R}=\frac{\pi}{m}$; $\frac{a}{2R'}=\frac{\pi}{m'}$ y por consiguiente

$$fQ\,\frac{R+R'}{RR'}\cdot\frac{a}{2}=fQ\pi\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)=fQ\pi\,\frac{m+m'}{mm'}$$

Bajo esta forma es como mas frecuentemente emplearemos la espresion de este esfuerzo medio, porque los números de dientes estan siempre dados inmediatamente por la observacion en las máquinas establecidas. Nos manifiesta que este esfuerzo será tanto menor cuanto mayor sea el número de dientes; por consiguiente hay siempre venta

taja bajo este punto de vista en aumentar este número.

Las espresiones anteriores se aplican inmediatamente al caso en que una linterna de husillos cilíndricos está conducida por una rueda, suponiendo que el arco descrito en la circunferencia primitiva sea igual al paso ó al intérvalo entre el eje de los husillos consecutivos.

Para aplicarlas al caso de una barra dentada bastaria hacer $R = \infty$: y para los engranages cónicos, R y R' serian los radios de los sectores del desarrollo de los conos.

II.

Comunicadores del movimiento

41. Las piezas de las máquinas que sirven para comunicar el movimiento desde un punto á otro de las mismas, para obtenerle en una direccion y con una velocidad determinadas, podrian considerarse solamente bajo el punto de vista geométrico; pero como ya indicamos en la primera seccion (44.6) no pueden desatenderse los principios de la mecánica al elegir estas piezas, si la máquina ha de satisfacer á las condiciones que allí desarrollamos para obtener el mayor efecto y hallarse en las mejores circunstancias. Así es, que no todas las soluciones geométricas serán

aceptables cuando se trate del aprovechamiento de la fuerza motriz, y aunque se deben en general simplificar las trasmisiones del movimiento en una máquina, esta circunstancia ha de estar subordinada siempre á las dos condiciones siguientes:

1.ª Que en las piezas elegidas se desarrollen los menores rozamientos que sea posible.

2.ª Que se trasmita el movimiento con la mayor regularidad, y por consiguiente que no se pongan en juego las fuerzas de inercia que deben ser destruidas sucesivamente en cada periodo de la máquina.

El movimiento de una parte de las máquinas, puede ser en cuanto á su forma, circular ó rectilíneo, ó segun una curva cualquiera.

En cuanto á su direccion puede ser continuo ó alternativo. El movimiento rectilíneo es necesariamente alternativo en las máquinas y no puede considerarse como contínuo sino en una parte de su movimiento; ó en algunos casos particulares en las máquinas sometidas á alternativas de movimiento y de reposo, como sucede en el torno, por ejemplo.

Siendo pues alternativo, casi siempre, el movimiento rectilíneo, se debe reemplazar en cuanto sea posible por el movimiento circular contínuo. Este evita, en efecto, las pér-

didas de trabajo á que dá lugar el cambio de direccion de los movimientos alternativos; y tanto por esta causa, como por la regularidad del movimiento de las máquinas, resulta que el movimiento circular contínuo es el mas principal y mas usado en ellas. Es tambien el que da lugar á rozamientos menos influyentes porque son los que se desarrollan en los ejes sobre sus cojinetes, cuya importancia es menor que los que se originan en las guias de las piezas de movimiento rectilíneo.

Por estas razones se trata siempre de obtener desde luego un movimiento circular contínuo y pasar de este á cualquiera otro, pudiendo por lo tanto decirse que el problema general de la transformacion de movimientos, puede considerarse reducido á la transformacion de un movimiento circular contínuo en otro cualquiera. Las piezas que constituyen las soluciones tanto directas como recíprocas de este problema, comprenden casi todas las empleadas generalmente en las máquinas bien construidas. El cuadro de transformaciones de movimiento que figura en la obra de M. M. Lanz y Betancourt está formado bajo un punto de vista puramente geométrico, por cuya razon, muchas de las soluciones no son usadas en las buenas máquinas ni aceptables bajo el punto de vista mecánico.

Concretándonos principalmente á las soluciones reconocidas como mas perfectas en la tranformacion de movimientos, empezaremos describiendo las piezas que se emplean en tranformar movimientos continuos en movimientos continuos: despues las que sirven para cambiar movimientos continuos en alternativos, y por último las piezas que transforman movimientos alternativos en otros alternativos. Con arreglo á esta division estudiaremos las tranformaciones de movimiento en el orden indicado en el siguiente cuadro.

Movimientos continuos en movimientos continuos.	1.º Circular contínuo en circular contínuo.
	2.º Circular contínuo en rectilíneo continuo.
	3.º Rectilíneo continuo en rectilíneo continuo.
Movimientos continuos en movimientos alternativos	4.º Circular contínuo en rectilíneo alternativo.
	5.º Circular continuo en circular alternativo.
	6.º Rectilíneo continuo en rectilíneo alternativo.
	7.º Rectilineo contínuo en circular alternativo.
Movimientos alternativos en otros alternativos.	8.º Circular alternativo en rectilíneo alternativo

Movimientos alternativos en otros alternativos.
- 9.º Circular alternativo en circular alternativo
- 10. Rectilíneo alternativo en rectilíneo alternativo

1.º Movimiento circular continuo en circular continuo.

42. Cuando los ejes de rotacion son paralelos sabemos (1) que hay tres medios de comunicar el movimiento conservando las velocidades en relacion constante; el primero es por el simple contacto de ruedas ó coronas montadas en estos ejes; el segundo por correas ó cuerdas sin fin; y el tercero por engranages. El 1.º solo es aplicable al caso en que los movimientos se verifican con mucha suavidad por no haber alteracion notable en la intensidad de los esfuerzos, no siendo estos tampoco muy considerables. La figura 103 representa una trasmision de esta especie, la cual exige que no haya deslizamiento en el contacto de las coronas por lo que á veces se las rodea de un cuero de búfalo que aumenta la aspereza de sus superficies y se hace variable la presion en el punto de contacto por contrapesos ó tornillos &. Esta disposicion suele emplearse en las fábricas de harinas para elevar los costales de grano por medio de una cuer

da arrollada á uno de los ejes (fig.ª 103) ordinariamente inmovil; pero que aproximándole al otro que está animado de un movimiento de rotacion, le transmite al primero durante el tiempo necesario á la elevacion del peso suspendido.

43. El segundo medio de comunicar esta clase de movimientos cuando los esfuerzos son mas considerables, consiste en arrollar una correa sin fin, sobre las poleas montadas en los ejes (fig.ª 104) Cuando ambos ejes han de girar en el mismo sentido, las correas no se cruzan, y en el caso contrario se colocan cruzadas. La relacion de las velocidades es constante interin no haya deslizamiento sobre las poleas, es decir, mientras no se vence el rozamiento directo con la correa, el cual sabemos crece con el arco abrazado y con la tension primitiva; por cuya razon y para evitar los efectos del alargamiento, suelen emplearse poleas de tension como la de la figura 62. Pudiera tambien separarse por medio de un tornillo, uno de los ejes (fig.ª 104) pero este medio no está exento de inconvenientes. En todos ellos no debe aumentarse la tension mas que lo necesario para que se verifique la trasmision del movimiento, pues siempre aumentan con ella las resistencias pasivas. Las coronas de las poleas deben ser

convexas para impedir que se escapen cuando toman una posicion oblicua. Si la superficie fuese cóncava, las aristas salientes de la concavidad atraerian fácilmente á la correa y la separarian de la polea. Las cuerdas sin fin pueden reemplazar á las correas cuando los esfuerzos no son muy considerables; entonces las coronas de las poleas deben presentar una garganta para recibir las cuerdas.

Tambien se emplean las cadenas para trasmitir estos movimientos especialmente cuando las fuerzas aplicadas son bastante considerables, la velocidad pequeña y los ejes estan muy separados; en estos casos las poleas se reemplazan por ruedas que llevan en sus coronas partes salientes (fig.ª 105) en las que se apoyan los eslavones de la cadena. Estos son de la forma rectangular A (fig.ª 106) en las cadenas á la Vaucanson que suelen emplearse en los bancos de estirar. Estas no se aplican á elevar pesos por medio del torno porque es necesario para esto que puedan doblarse en todos sentidos. Las cadenas ordinarias del comercio tienen esta ventaja, pero se colocan mal sobre la superficie cilíndrica de un torno. M. Neven ha ideado una forma para el arbol de este último cuyo contorno puede recibir tres eslabones de plano (fig.ª 107) y tres de canto; y así

no hay necesidad de que la cadena se arrolle mas de una vuelta, porque de esta disposicion resulta un verdadero engranage, y estando suspendido el otro estremo de la cadena se arrolla siempre con regularidad.

Una disposicion análoga se usa en las gruas de Mr. Gall cuyas cadenas se componen de varios eslabones B (figª 106) atravesados por un mismo eje y ondulados lateralmente, los cuales son recibidos en poleas que presentan su contorno ondulado tambien, y se verifica un engrane que basta para transmitir grandes esfuerzos sin necesidad de arrollar la cadena una vuelta completa.

En las transformaciones anteriores del movimiento, se conservan las velocidades en relaciones constantes; pero el uso de las correas sin fin se presta á variar con facilidad esta relacion haciendo pasar la correa de un par de poleas á otro contiguo montado sobre los mismos ejes (figª 108) satisfaciendo á la condicion que la suma de cada dos diametros sea constantemente igual á la de los primeros.

Otro medio de variar la relacion de las velocidades es el empleo de poleas de espansion (figª 109) cuyas coronas se componen de segmentos separados que pueden aproximarse ó des-

jarse del eje simultáneamente por medio de una rueda dentada que engrana con cuatro piñones y estos con las barras que van unidas á los segmentos y pueden deslizar en guias fijas. Por este medio ú otros mecanismos análogos, se varia el diámetro de la polea conducida y por consiguiente la relacion de las velocidades, pero se necesita emplear poleas de tension para que la correa esté suficientemente tensa en todas sus posiciones.

44. El tercer medio de comunicar el movimiento de rotacion entre dos ejes paralelos, y el mas usado en las máquinas, es el de los engranages, en los cuales segun sabemos, se trasmiten las velocidades angulares en razon inversa de los radios de los circulos primitivos. Se presta este medio á la trasmision de grandes esfuerzos, y combinando varias ruedas entre sí puede cambiarse la velocidad desde la primera á la última en una relacion muy extensa.

Sea, por ejemplo, una rueda A (fig.ª 110) de radio R que engrana con un piñon de radio r; sobre el mismo eje de este piñon se coloca otra rueda B (de radio R') la cual engrana con otro piñon (de radio r') montado en un tercer eje en que está la rueda C. Si llamamos w, w', w" las velocidades an-

gulares de las ruedas A, B, C, se tendrá

$wR = w'r$, $w''r' = w'R'$ y dividiendo estas ecuaciones resultará

$$\frac{wR}{w''r'} = \frac{w'r}{w'R'} \quad ; \quad \frac{w}{w''} = \frac{rr'}{RR'} \ldots (a)$$

es decir, que la velocidad angular de la primera rueda es á la de la última, como el producto de los radios de los piñones, es al producto de los radios de las ruedas. Como esta relacion es la misma que existe entre el número de vueltas del primer eje respecto del último, esta fórmula podrá aplicarse en los problemas del establecimiento de máquinas análogas al que propusimos por ejemplo al final del numl. 44, 1.ª Leccion (fig.ª 30).
En él la relacion $\frac{w}{w''}$ era de $\frac{8}{88} = \frac{1}{11} = \frac{rr'}{RR'}$.
Este producto se descompuso en los dos factores: $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$, y $\frac{r'}{R'} = \frac{1}{5,5}$ que sirvieron para determinar las relaciones de magnitud de los piñones N y B respecto de las ruedas M y A.

Se deduce de la misma formula (a) que si en la figura 110 se hubiesen hecho engranar las ruedas A B C entre sí suprimiendo los piñones, la velocidad angular no habria cambiado desde la primera rueda á la última, puesto que, en dicha fórmula r y r' serian iguales á R y R' y por consi-

guiente $w = w''$. Esta disposicion de engranages podrá convenir especialmente cuando la distancia del primer eje al último sea algo considerable.

45 Conviene observar que la manera de aplicar los esfuerzos á las ruedas de engranage puede influir mucho en la intensidad de las presiones que resultan sobre los apoyos las cuales siempre se debe procurar disminuir. Supongamos que el eje C (figª 111) gire en virtud de un esfuerzo motor P y que la rueda A haya de conducir un piñon. La resultante de las presiones sobre los cojinetes, se compondrá del peso del arbol y rueda, del esfuerzo P y de la presion Q ejercida contra los dientes del piñon. Si este se coloca en B esta resultante será la menor posible y en el caso en que pudieran hacerse iguales los radios Cm y Cn, los esfuerzos P y Q tambien lo serian, y las presiones quedarian reducidos á los pesos. Pero si el piñon estuviese colocado en B' la resultante será la mayor posible.

Cuando una rueda A (figª 30) haya de conducir un número par de piñones, convendrá colocar cada dos en los extremos de un mismo diámetro para que se destruyan mútuamente las presiones ejercidas contra los dientes y no aumenten la que se ejerce sobre el eje.

Disposiciones análogas podran tener aplicacion á otros casos y no deben dejar de tenerse

en consideracion. Pasemos ya á examinar el caso en que los ejes de rotacion no son paralelos sino que se cortan bajo cierto ángulo.

46 La trasmision del movimiento se verifica en este caso por medio de ruedas cónicas de engranage, y las velocidades angulares están en razon inversa de los radios T C, T C' (figª 112) de los círculos trazados en el medio de la corona de los conos primitivos, porque estas líneas son proporcionales á los senos de los ángulos C S T, C S T que componen el ángulo de los ejes. Bastará, pues, para hacer la division de este ángulo, tirar las rectas m m', n n' paralelas á los ejes y separadas de ellos las magnitudes T C y T C', y el punto T en que se encuentran, determinará la posicion de la arista de contacto S T. Las superficies de los dientes y las que terminan las ruedas normalmente á los conos primitivos, las hemos dado á conocer ya al tratar de esta clase de engranages. Añadiremos aquí que en la práctica se aplica casi siempre á trasmitir movimientos entre dos ejes que se cortan en ángulo recto.

A esta trasmision puede aplicarse tambien la disposicion de la figura 114 en que el simple contacto del canto de un platillo con el plano de otro, puede trasmitir el

movimiento de rotacion cuando se trata de esfuerzos muy pequeños. Suele aplicarse esta disposicion á los planimetros que sirven para medir áreas planas terminadas por líneas curvas.

47. Por último, cuando los ejes se cruzan se trasmite el movimiento de rotacion combinando tres ruedas cónicas. Sean AB y CD (fig.ª 113) las direcciones de los ejes; se trazará una recta EF que se apoye sobre ambos á la vez y se la tomará por eje de una rueda doblemente cónica a intermedia entre las ruedas b y c que tienen por ejes las rectas dadas: las posiciones de estas ruedas se fijan con arreglo á las condiciones del problema.

Se ha propuesto efectuar directamente la trasformacion para este tercer caso, pero los métodos presentados relativamente á este objeto son demasiado complicados y por consiguiente defectuosos.

En el caso particular de cruzarse los ejes á angulo recto, puede emplearse en esta trasmision de movimientos, una rosca de filetes cuadrados, que descansa sobre dos cojinetes y terminada por una manivela á la que se aplica la potencia (fig.ª 115) Las hélices de esta rosca engranan en los dientes de una rueda cuyo plano contiene al eje de la rosca

y primiéndola constantemente en la misma direccion, la rueda gira alrededor de su eje, y puede emplearse en levantar pesos suspendidos á una cuerda que se arrolle en el arbol de la rueda. El trazado de este engranage, le dimos ya á conocer. Por su medio, conduce la rosca á la rueda, pero el movimiento recíproco rara vez puede aplicarse. En efecto, conduciendo la rueda á la rosca, los dientes ejercerian contra las hélices, acciones paralelas al eje de la rosca, que pueden compararse á la presion vertical de un cuerpo contra un plano de pequeña inclinacion, la cual sería la misma que la de las hélices respecto á la base del cilindro á que pertenecen. Se comprende que siendo muy pequeña la inclinacion A C (figª 116) de este plano, la presion vertical Q no le haria bajar porque los rozamientos crecen con esta presion y no llegarian á ser vencidos en los casos ordinarios. Al paso que si se aplica una fuerza P contra la cara B C en el sentido B A, y el cuerpo Q estuviese sugeto á deslizar verticalmente entre rodajas § §, no seria dificil hacerle subir verticalmente. Volviendo, pues, á la rosca sin fin se reconoce que la accion de los dientes de la rueda contra los filetes de la rosca, siendo paralela al eje de esta, no podria generalmente, obrando co-

no potencia producir el movimiento, mientras que este último tendria lugar con facilidad por una fuerza perpendicular á esta accion; es decir, que hiciese girar á la rosca. Esta observacion es aplicable á todas las máquinas; porque siempre que obrando en un extremo de una máquina se la puede mover con facilidad, debe suceder lo contrario si se obra en el otro extremo. En efecto, siendo el objeto de una máquina cambiar el trabajo Ff del motor en el trabajo Qq del operador, y siendo estos trabajos iguales en la hipótesis de no haber resistencias pasivas, es evidente que si el camino f recorrido por el punto de aplicacion del motor es pequeño respecto al camino q recorrido por el operador, el esfuerzo F del motor será muy grande respecto al esfuerzo Q del útil. Por esta razon, en el caso presente se pondria facilmente la máquina en movimiento obrando sobre el operador, y muy dificilmente sobre el receptor.

Análogamente se observa que aplicando un esfuerzo á una sierra mecánica dispuesta ordinariamente para marchar con gran velocidad, facilmente se pone en movimiento toda la máquina mientras que serian impotentes los mayores esfuerzos aplicados á la rueda motriz. Lo mismo

se observa en las máquinas de vapor, que pueden moverse facilmente con pequeños esfuerzos aplicados al volante.

En el ejemplo anterior del plano inclinado, los caminos recorridos por la potencia P y por la presion Q son proporcionales á la base y á la altura del plano; si la inclinacion es muy suave, la base es muy grande respecto á la altura, y por lo tanto la potencia P es mucho menor que la presion Q. La rosca sin fin da lugar á grandes pérdidas de trabajo debidas al rozamiento, por lo que no se emplea en las máquinas poderosas. Pero por la regularidad de su movimiento es muy útil cuando se trata de una obra de precision.

418 La trasmision del movimiento circular por medio de cuerdas sin fin, es tambien aplicable á dos ejes que se cruzan. Sean en efecto, A y B (fig.ª 117) estos ejes, sobre los cuales hay montadas perpendicularmente dos poleas. Supongamos que la interseccion de los planos de estas poleas sea la línea cd; se tomarán en esta recta dos puntos c y d, y se tirarán desde ellos las tangentes ce, cg y df, dh á las poleas. Es claro que si en el plano de las dos primeras tangentes se coloca una polea c, y en el plano de las segundas, otra polea d. se podrá arrollar una cuerda ó correa sin

fin segun el contorno cefdhgc que servirá para trasmitir el movimiento de rotacion de un eje al otro conservandose las velocidades angulares en razon inversa de los radios de las poleas respectivas. En este sistema se puede facilmente cambiar el sentido de rotacion de las poleas A y B tirando dos de las tangentes cg dh en posicion cambiada.

Terminaremos esta primera clase de transformacion de movimientos dando á conocer la junta quebrada ó universal que es una pieza que reune dos ejes cualesquiera de modo que el uno trasmite al otro el movimiento de rotacion que se le imprime. Sean los dos ejes B B' D D' (figura 118) cada uno lleva una mandibula en su estremo, y ambas abrazan dos ejes H que forman una cruz. Esta disposicion se vé en perspectiva en la figura 119. Para dar idea de la trasmision del movimiento en la junta quebrada, se observará que cuando gira el arbol A (figª 119) arrastra en su movimiento la mandibula D así como la cruz C, cualquiera que sea la posicion del plano de esta cruz respecto á las dos abrazaderas de la mandibula que tienen facultad de girar sobre sus ejes. Como las cuatro partes de la cruz estan solicitadas en este movimiento sirven de apoyos á la mandibula fijada al eje B, que debe por lo tanto girar tambien é imprimir á este eje un movi-

miento de rotacion cuya velocidad angular será variable en cada instante. Este sistema, aunque sencillo no conviene sino en máquinas poco poderosas, ó cuando los ejes á que hay que trasmitir el movimiento no forman entre sí ángulos muy grandes. Puede emplearse, por ejemplo, para empalmar ejes muy largos que deban apoyarse en mas de dos puntos, y no seria facil colocarlos exactamente en línea recta. Las presiones sobre las articulaciones son enormes y ocasionan muchos rozamientos, si bien los caminos recorridos por los puntos de aplicacion de esta resistencia son pequeños. Este comunicador se usa en Holanda para trasmitir el movimiento de rotacion del eje horizontal de los molinos de viento á las roscas de Arquimedes que se emplean en elevar agua y cuyos ejes estan inclinados respecto de la horizontal.

2º Movimiento circular continuo en rectilíneo continuo.

49. Esta transformacion y la recíproca tiene lugar en el torno. Se sabe que consiste en un arbol apoyado sobre muñones en coginetes (figura 120) y que gira alrededor de su eje por medio de una manivela ó de una rueda. Si se arrolla al arbol una cuerda en que se sus-

penda un peso y se comunica un movimiento circular á la manivela, el peso se elevará segun la vertical y ofrecerá un ejemplo de la transformacion del movimiento circular contínuo en rectilíneo contínuo. Si se arrolla la cuerda á la rueda y obra el peso como motor, como sucede en los relojes, descenderá verticalmente y su movimiento rectilíneo se transformará en el circular que toma el torno. Las velocidades de estos dos movimientos serán evidentemente proporcionales al rádio del árbol del torno y al de la manivela ó de la rueda.

Otra solucion de este problema se obtiene por medio de una rueda A (fig.ª 121) que conduce una barra ó varilla B C que desliza entre guias fijas aa bb, ó entre rodillos cc dd y e. Se pueden fijar primero en C sobre la barra y en C' sobre la rueda los estremos de una cinta ó correa CTC' por cuyo medio; girando la rueda en sentido conveniente levantará á la barra. Si se colocan ademas otras dos correas BTB' en sentido contrario, de modo que quede entre ellas el intérvalo suficiente para el juego de la primera, se podrá verificar el movimiento de la varilla de arriba abajo; haciendo girar la rueda en sentido contrario al primero.

Otra transformacion de este movimiento

conveniente para máquinas poderosas, consiste en reemplazar la varilla por una barra dentada (fig.ª 122) conducida por una rueda de engranage cuyo trazado ya conocemos.

La rosca y la tuerca (fig.ª 123) ofrecen tambien un ejemplo de la transformacion del movimiento circular continuo en rectilineo continuo. Ya es la rosca la que gira sobre si misma y la tuerca permanece guiada en su movimiento rectilineo en direccion del eje de la rosca: Ya es la tuerca la que gira y la rosca sube ó baja.

Ya hemos estudiado esta disposicion y determinado los rozamientos á que dá lugar, los cuales son tan grandes que no se debe emplear como propia para comunicar movimientos, sino aplicable á guiar los útiles de las máquinas, ó en las prensas. La relacion de las velocidades es constante é igual á la que existe entre la circunferencia de la rosca y el paso.

50. M. Prony ha ideado un modo de transformar el movimiento circular en otro rectilineo cuya velocidad sea tan pequeña como se quiera.

A B (fig.ª 124) es un eje dividido en tres partes ab, cd, ef; las dos roscas ab y ef tienen el mismo paso y atraviesan dos apo-

yos fijos C, D, en que hay dos tuercas; este eje se mueve horizontalmente y recorre en el sentido EF á cada vuelta, un espacio H, igual al paso de estas dos roscas: cd forma otra rosca cuyo paso H' es mayor que el de las dos primeras y que se introduce en una tuerca M que solo puede marchar á lo largo de la base EF. Esta tuerca recorreria de E hácia F el paso H' de su rosca en una vuelta, si esta rosca no hiciese mas que girar sobre sí misma; pero como al mismo tiempo avanza de F á E la cantidad H, es evidente que la tuerca M participa tambien de este último movimiento y que por lo tanto no adelantará en una revolucion mas que la diferencia H'–H, diferencia que puede hacerse tan pequeña como se quiera sin disminuir los pasos de las roscas respecto de sus dimensiones ordinarias. Este aparato es útil, ya para guiar los cuchillos de trazar cuyos movimientos deben ser muy lentos, ya tambien para manejar el hilo retícula de los anteojos que no debe moverse sino en cantidades muy pequeñas.

Con arreglo á estos mismos principios de transmision de movimientos diferenciales, se construyen tambien los tornos chinos, como el representado en la fig.ª 59 de que

ya nos ocupámos al calcular las resistencias pasivas, y vimos que por su medio, el peso Q no se eleva en cada revolucion mas que la mitad de la diferencia entre las circunferencias de los dos cilindros de que se compone el arbol, la cual puede hacerse tan pequeña como se quiera, y por lo tanto, se presta este aparato á que pueda elevarse un gran peso sin que el esfuerzo motor sea muy considerable, porque el trabajo en la unidad de tiempo, tampoco lo será.

3º Movimiento rectilíneo continuo en rectilíneo continuo.

51. Todo sistema de piezas rígidas permite trasmitir á distancia el movimiento rectilíneo continuo y producir un movimiento de la misma clase con igual direccion y velocidad.

El medio mas generalmente usado es el de las poleas, sobre las que, arrollándose una cuerda, es claro que el movimiento comunicado á uno de los ramales se trasmitirá al otro en una direccion diferente, pero situada en el mismo plano que el primero que es el de la polea. La velocidad será la misma en ambos ramales. Es claro que el mismo efecto se puede obtener emplean-

do correas ó cadenas sobre poleas ó tambores convenientemente dispuestos para recibirlas.

Cuando las dos rectas que marcan las direcciones del movimiento no se cortan, ó no estan en un mismo plano, hay que emplear en la transformacion, por lo menos dos poleas contenidas cada una en un plano cualquiera que pase por cada recta, (fig.ª 125) y dispuestas de modo que la porcion de cuerda que toca las dos poleas se confunda con la interseccion de estos dos planos.

Sean A B y CD (fig.ª 126) las dos rectas cualesquiera segun las que se quiere transformar el movimiento rectilineo. Se tomarán sobre estas rectas dos puntos E y F cerca de las posiciones en que deban hallarse las poleas y se les unirá por una recta E F. Imagínense en el plano BEF y en el plano EFD dos círculos, uno tangente á AB y á EF, el otro á CD y á EF, y el problema quedará resuelto. Esta clase de transformacion es muy útil en los casos en que hay que comunicar el movimiento rectilíneo contínuo á grandes distancias, y cuando hay obstáculos que obligan á interrumpir la direccion de las líneas. Tal es el caso en que se trata de comunicar el movimiento de un extremo á otro de un edificio siguiendo varias sinuosidades.

Para modificar la velocidad del movimiento en estos sistemas, sería necesario emplear los polipastos análogos á los de las figuras 64 y 65, en los cuales la velocidad de la resistencia es $\frac{1}{n}$ de la velocidad de la potencia, siendo n el número de ramales ó cuerdas. Estas disposiciones tienen el inconveniente de ocasionar bastantes resistencias pasivas, como ya sabemos.

52. Se han propuesto otros medios para la transformacion de movimientos que nos ocupa; pero la mayor parte son defectuosos ó complicados. Uno de ellos es el siguiente.

Sea una cuña A (figª 127) que puede deslizar segun su longitud entre cuatro guias cd ef mientras que otra cuña B está provista de rodillos g.K.h.i, en contacto con las guias. Es claro que si se mueve la cuña A de f hácia d, el lado mn de la cuña B se elevará conservando su paralelismo. Los rozamientos son aquí muy considerables, por lo que, este sistema que se presta á trazar rectas paralelas mn, m'n', no es bueno para trasmitir la accion de las fuerzas. Las prensas de cuña ofrecen un ejemplo de esta transformacion de movimiento, pero son entonces, un operador en las máquinas y puede ser precisa su adopcion, aun cuando su accion es intermitente y se ejerce en virtud de choques

repetidos.

Se ha recurrido con el mismo objeto al sistema de dos reglas ab y cd (figª 128) unidas por otras dos iguales á charnela que constituyen un paralelógramo. Estando fija la cd, por ejemplo, se mueve la ab paralelamente á sí misma.

Este sistema se ha empleado en ciertas máquinas en que el movimiento no es permanente. Sirve de guia á las piezas de madera que deben presentarse paralelamente á sí mismas á la accion de una sierra circular. Este paralelógramo es mas ó menos oblícuo segun que la pieza que hay que aserrar tiene mas ó menos espesor.

El mejor medio de conducir un cuerpo en una direccion rectilínea contínua ó paralelamente á sí mismo, es colocarle sobre un carrito con ruedecillas de hierro ó cobre con gargantas (figª 129) y que ruedan sobre lengüetas ó carriles salientes de hierro. Esta disposicion se ha perfeccionado en los aparatos (mull-jennys) empleados en las fabricas de hilados, para hacer avanzar y retroceder el carrito que lleva los husillos con perfecto paralelismo. Lleva á este efecto dos poleas (figª 131) iguales b c dispuestas para recibir dos cuerdas bien tensas colocadas en la direccion del mo-

vimiento y plegadas en la forma a b c d la una y a' b' c' d' la otra. Los resultados de este aparato son de una extraordinaria exactitud confirmada por la experiencia.

También se guian los bastidores portasierras con lengüetas laterales (fig.ª 130) muy rectas y labradas, que se hacen deslizar en hendiduras de cobre. Esta disposicion suele emplearse en las sierras.

4.º Movimiento circular continuo en rectilíneo alternativo.

53. El medio mas conveniente de verificar esta transformacion consiste en la combinacion del movimiento de rotacion de una manivela alrededor de un eje con el de una biela, cuyo otro extremo esté articulado con una pieza sugeta por guias á tomar un movimiento rectilíneo alternativo. En la figura 132, A es el arbol giratorio al que está fija la manivela AB, en cuyo boton B está articulada la biela BJ, y por el otro extremo lo está con la pieza JF sugeta á describir con movimiento rectilíneo una excursion de una longitud igual al doble de la manivela en cada semirevolucion de esta. La principal ventaja de esta disposicion que la hace tan

generalmente usada en las máquinas, es que variando la velocidad de la accion por grados insensibles al principio y al fin de cada oscilacion de la pieza CF se conducen sin experimentar choques ni sacudidas que ocasionen perdidas de fuerza viva segun ya observamos al tratar de la ley de variacion del trabajo y de la velocidad en este sistema. Esta variacion periódica del movimiento en virtud de la cual la velocidad viene á ser la misma en las mismas posiciones, subsiste aun cuando aumenten las dimensiones del boton B de la manivela. Mientras la distancia de los centros A y B permanezca la misma; la amplitud de los movimientos rectilíneos no variará. Si el círculo del boton aumenta hasta envolver al eje fijo como sucede en la figura 16, se convertirá este sistema en un escéntrico ó círculo que no gira alrededor de su centro: la biela se compone entonces de una doble barilla que desliza con cierto huelgo sobre una garganta practicada en la circunferencia exterior del escéntrico y reforzada por otras varillas cruzadas. Se comprende que el punto B puede comunicar el movimiento rectilíneo estando unido á una barilla como la CF en la figura 132.

El trabajo absorvido por el rozamiento del anillo de la biela sobre la garganta del escéntrico, aumenta con la circunferencia de este

último y puede llegar á ser superior al efecto útil que la biela deba trasmitir. En efecto, llamemos F el esfuerzo ejercido por la biela, R la distancia CD (figª 16) del centro del arbol al del anillo del escéntrico; la amplitud de una oscilacion rectilínea de B será 2R y por consiguiente para una revolucion completa del escéntrico será 4R. El trabajo trasmitido en este tiempo por la biela, será pues, 4RF. Por otra parte el rozamiento desarrollado en la garganta del escéntrico es proporcional á la presion F, ó igual á fF, y si se atiende á que, en la hipótesis de que la biela permanezca sensiblemente paralela á sí misma, el camino recorrido por el punto de aplicacion del rozamiento sobre la garganta del escéntrico en una revolucion completa de este último, es igual á su circunferencia; el trabajo absorvido por el rozamiento será $2\pi r f F$ siendo r el radio del anillo. Dividiendo este trabajo por el efecto útil 4rF se tendrá para su relacion

$$\frac{2\pi r f F}{4FR} = \frac{4rf}{2R}$$

Si, por egemplo, el coeficiente $f = \frac{1}{6}$ y el radio r es seis veces la escentricidad, la relacion anterior del trabajo consumido por el rozamiento al efecto útil se convierte en $\frac{\pi}{2} = 1,57$. Por consiguiente el efecto trasmitido al arbol fijo es $= 1 + 1,57 = 2,57$ ó dos veces y

media el trabajo útil de la biela.

Este ejemplo muestra la gran pérdida de trabajo que resulta del empleo del excéntrico, aun que esta desventaja es poco sensible cuando no hay que vencer grandes resistencias, como sucede cuando se le aplica á mover las válvulas de distribucion en las máquinas de vapor. Lo que precede puede dar idea del modo de apreciar la bondad de un mecanismo de transformacion de movimientos: basta comparar el trabajo que desarrollan los rozamientos con el producido por la potencia.

A veces en lugar de un brazo de manivela se emplea una rueda de hierro fundido (figª 133) á la que vá unido un boton que trasmite el movimiento á la biela. Se toma la precaucion de reforzar el brazo en el sitio en que ha de colocarse el boton.

84. En general se llama excéntrico toda curva que gira con un árbol sin ser concentrica á este árbol: este mecanismo permite siempre transformar el movimiento circular continuo en rectilíneo alternativo; y dá medios de variar la relacion de las velocidades segun la forma de la curva. En la figª 134, A es el centro de rotacion del excéntrico formado por un triángulo equilatero A m n, cuyos lados son arcos de círculo trazados desde los ver

tico. En la varilla Bb hay una abertura rectangular cuyos lados pq, rs distan entre sí una magnitud igual al radio de los arcos del escentrico: por consiguiente estos lados estarán en contacto con este en todas sus posiciones y en cada revolucion del escéntrico subirá y bajará la barilla bB una distancia igual al radio.

Sea una pieza vertical M N (fig.ª 135) dirigida por rodajas 99 y apoyada en un disco ó escéntrico en forma de corazon que recibe su movimiento de un arbol giratorio A. Si la curva se mueve de derecha á izquierda, la pieza M N se elevará hasta que el punto P haya llegado sobre la vertical A N y descenderá durante media revolucion hasta que el punto de retroceso Q haya llegado en la vertical A N sobre el arbol giratorio A. En una revolucion, la pieza M N subirá y bajará por grados insensibles, cantidades iguales á la diferencia A P – A Q.

Ordinariamente la pieza M N es la varilla de un émbolo que ha de recorrer espacios iguales para ángulos iguales descritos por la curva alrededor del eje A. Sean en este caso P y Q (fig.ª 136) el estremo de la curva y el punto de retroceso; y A el centro del arbol giratorio. Se lleva A Q desde A hasta 6' sobre

la recta Q A P: se divide la amplitud A P – A 6' de la oscilacion en partes iguales, seis por ejemplo: se dividen tambien las dos semicircumferencias arbitrarias que tienen por diámetro la recta Q A P en el mismo número de partes iguales; tirando los radios á estos puntos de division se describen con centro en A y radios sucesivamente iguales á A P, A 1, A 2, A 3, arcos de circulo cuyas intersecciones con los rádios del mismo número, determinarán otros tantos puntos de la curva buscada. Es facil ver que los diámetros de esta curva que pasan por el centro A son todos iguales á la distancia Q P.

Supongamos que se quieran obtener varias intermitencias en el movimiento: por ejemplo, que se quiera que en el primer cuadrante, el punto B (figª 137) marchase uniformemente hasta A; que en el segundo cuadrante tuviese una intermitencia; que en el tercero, el punto B volviese uniformemente de A á B y por último, que en el cuarto tuviese otra intermitencia. Las partes B D y C E se trazarian como anteriormente para el movimiento uniforme, y las porciones D C, B E serian arcos de circulo con centro en O que no podrian imprimir movimiento alguno á la pieza rectilínea.

La figura 138 manifiesta la combinacion

de rinches excéntricos cuando se quiere que en cada revolucion se verifiquen varias oscilaciones completas en el movimiento rectilineo (tres en este caso) Ha-brá que dividir la tercera parte de cuatro rectos en un número de partes igual al número de puntos determinados sobre la varilla recti-línea.

La disposicion de la figura 139 se presta tambien á trasformar el movimiento de rotacion de un platillo que lleva un boton saliente, el cual desliza en una ranura horizontal suficientemente larga de una varilla, en el movimiento rectilíneo alternativo de esta última; pero esta disposicion es muy viciosa porque el camino que describe el boton es muy grande y el rozamiento que en su contacto se desarrolla, absorve una gran parte del trabajo motor.

55 El sistema representado en la figura 140 da tambien otra solucion del mismo problema. Se compone de dos barras dentadas, paralelas, y formando parte de un mismo bastidor, entre las cuales gira una porcion de piñon siempre en el mismo sentido; por consiguiente engranará sucesivamente con cada una de las barras, y estas tomarán un movimiento rectilíneo alternativo. Pero esta disposicion es tambien defectuosa porque dá

lugar á choques al principio de cada oscilacion. El mismo inconveniente se observa en la disposicion de la figura 141 que se presta á levantar un pilon alternativamente por el movimiento de rotacion de un sector dentado. Es preferible para este objeto emplear las ruedas de alaves aunque tampoco puede evitarse el choque, ni el rozamiento que resulta en la varilla y sus guias. Para disminuir este último se compone la varilla de dos partes EE (figª 142) separadas una cierta porcion y ligadas por dos cepos laterales bb: esta porcion vacia está atravesada por un perno ó rodillo a contra el cual actua el álave, el cual puede así conducir la varilla del pilon segun la vertical que pasa por su centro de gravedad, y atenuar mucho los rozamientos en las guias de esta varilla; pero el rodillo a con el uso deja pronto de girar.

Para hacer menos influyentes los efectos del choque suele emplearse para álaves una curva BC (figura 143) que sea á la vez tangente en B á la circunferencia del árbol giratorio y á la traviesa ó sobarbo en el momento en que viene á encontrar á este en el estado de reposo. De este modo se produce un deslizamiento mas bien que

un choque, y el pilon se eleva gradualmente. Pero como aquí el álave necesita tener mas desarrollo, el camino del rozamiento es mayor y el trabajo consumido por él puede ser igual al perdido en el choque; sin embargo, siempre tiene esta disposicion la ventaja de evitar sacudidas perjudiciales á la solidez de las máquinas.

56 Terminaremos describiendo una coleccion de esta clase de trasformaciones, mas curiosa que útil, que consiste en la combinacion siguiente: Una rueda C (fig.ª 144) dentada interiormente está fija en dos apoyos p p: el arbol A termina á una cierta distancia del plano de esta rueda y lleva en su estremo una manivela M que gira alrededor del arbol A y cuyo boton B se prolonga segun un eje paralelo al mismo arbol. La rueda dentada (D) tiene un radio mitad del de la rueda C y puede girar al rededor del eje B engranando al mismo tiempo con los dientes de la rueda C siguiendo el movimiento de la manivela. E representa una barra de hierro que liga la prolongacion del eje B con un boton F saliente por la parte posterior de la rueda (D) para suspender á él una biela FG. Esta biela ó su estremo F describirá mientras gira el centro B alrededor de A

una recta que será el diámetro F A; y recíprocamente una fuerza aplicada segun la biela cambiará el movimiento rectilíneo alternativo en otro de rotacion continuo. Esto es evidente con solo recordar que la línea descrita por F es un caso particular bien conocido de las epicicloides interiores. Sin embargo, segun ya hemos indicado, tiene este sistema el grave inconveniente de dar lugar á fuertes presiones en los dientes que pueden ocasionar su rotura.

5.º Movimiento circular continuo en circular alternativo.

87 El sistema mas perfecto para esta clase de transformacion de movimientos, es el de una manivela A B (fig.ª 145) que gira alrededor del arbol A y tramite por intermedio de una biela B C un movimiento circular alternativo á un balancin C E móvil alrededor de un eje D. Esta disposicion muy usada en las máquinas de vapor, se presta á cambiar el movimiento del otro estremo del balancin en un movimiento rectilíneo que deba tener la varilla de un émbolo. Describiremos mas adelante la disposicion del paralelógramo E F H N que llena este objeto.

El primer medio imaginado por Wat pa-

ra esta clase de transformacion consiste en la rueda planetaria. Aunque este medio se ha abandonado completamente por su poca solidez y los grandes rozamientos que se producen vamos á describirle sucintamente.

(Se compone de un balancin A B (fig.ª 146) que gira alrededor del eje C: en un extremo lleva una biela articulada cd que por su otro extremo va unida con tres pernos al centro de una rueda dentada E, que engrana en otra F del mismo radio y fijada al eje del volante. Por la parte posterior de estas ruedas hay) una barra que mantiene sus dos centros á una distancia invariable y articulada con sus ejes. El movimiento circular contínuo del volante hace subir y bajar la rueda E alrededor de la F y por consiguiente la biela trasmite un movimiento circular alternativo al balancin A B.

Por tener las dos ruedas E, F el mismo radio, se sigue que para una oscilacion completa del balancin, el volante dará dos vueltas.) En efecto, la oscilacion completa del balacin tendrá lugar cuando el centro de la rueda E haya hecho una revolucion alrededor del centro f del volante.

Llamando v la velocidad angular con que se mueve el primer centro alrededor de f;

R el rádio de cada una de las ruedas dentadas, 2 R v será el camino recorrido en un segundo por el centro de la rueda E. Puesto que esta rueda está fija invariablemente á la biela, todos los caminos recorridos simultáneamente por los puntos de esta rueda serán iguales al que recorre su centro: así 2 R v será tambien el camino recorrido por la rueda E en su punto de contacto con la rueda F. Llamando v' la velocidad angular de esta última, el camino recorrido en un segundo por este mismo punto de contacto como perteneciente á la rueda F estará representado por R v'; de donde se saca

$$Rv' = 2Rv, \text{ y por consiguiente } v' = 2v$$

Lo que nos demuestra que la velocidad angular, ó ~~el~~ número de vueltas del volante es doble de la velocidad angular de la biela, ó del número de sus oscilaciones completas.

Las ruedas de álaves empleadas en elevar martinetes como en la figura 147, dan tambien la solucion de este problema: en ella el álave obra de arriba abajo sobre el extremo de la palanca opuesto al del martillo y el eje de giro se halla entre estos extremos. Otras veces el álave levanta el martillo por la cabeza, y es el caso del martillo frontal (figª 148). Por último, puede obrar el álave

en un punto intermedio entre la cabeza y el eje de rotacion (fig.ª 149) En este caso se puede disponer de un modo análogo al de la figura 143 para atenuar los efectos del choque. Se reduce á tirar por el eje A, una recta AC próximamente tangente al arbol giratorio y trazar un álave que sea tangente en el mismo punto al arbol y á la recta paralela á AC. Este sitema se emplea en las fabricas de Cockerill cerca de Lieja.

58 Otros medios hoy para verificar la trasmision que nos ocupa, analogos á los empleados en la trasmision del movimiento circular continuo en rectilíneo alternativo, valiéndose de los engranages ó de los escentricos, y cuyos inconvenientes les son tambien comunes. En la figura 150 se representa una de estas disposiciones por la que una rueda cónica dentada en una parte de su contorno solamente y, animada de un movimiento de rotacion continuo, engrana alternativamente con una ú otra de las dos ruedas cónicas laterales montadas sobre un mismo árbol horizontal, el cual girará alternativamente en un sentido y en otro. Esta disposicion tiene los inconvenientes que hicimos notar en la de la figura 140.

El escéntrico A (fig.ª 151) puede tambien

trasformar su movimiento de rotacion en otro circular alternativo obrando sobre una palanca B D que se apoya por medio de una rodaja sobre dicho escentrico. Girando este en el sentido de la flecha el punto D se alejará del centro de rotacion A en su contacto con la porcion m n p, y se aproximará durante el paso de la p q m para volver á su posicion inicial, suponiendo que por medio de un resorte ó de un peso subsista siempre el contacto de la rodaja y el escéntrico. La amplitud de la escursion será la máxima diferencia de los radios A m y A p.

Si no puede emplearse el resorte, puede hacerse uso de la disposicion de la figura 152 en la que el escéntrico está formado por una ranura practicada en un platillo giratorio al rededor de su centro: en esta ranura entra un boton unido á la pieza de movimiento alternativo, contra el cual egerce la presion ó traccion el escéntrico

59. Para la transformacion reciproca, es decir, de un movimiento circular alternativo en otro contínuo se puede emplear la palanca de Lagarouse Consiste en una palanca a c (figª 153) que gira alrededor de c y que lleva en un punto como a, articulado un diente ab dispuesto para engancharse en los dientes de una rueda catalina fija al eje c . El movimiento circular

alternativo de la palanca ac engancha y desengancha sucesivamente un diente de la rueda que vá girando así en el mismo sentido aunque con intermitencias, durante las cuales es retenida en su posicion por un escape d.

Se disminuye la duracion de estas intermitencias modificando el sistema anterior como representa la figura 154. La palanca está reemplazada por un balancin AB que gira alrededor de C y cada uno de sus brazos lleva una palanca DE, FG que alternativamente engancha y desengancha un diente de la rueda catalina, la cual gira siempre en el mismo sentido y suele emplearse para mover un arbol de un torno y elevar pesos; pero en este sistema hay una sucesion de pequeños choques que le hacen defectuoso para transmitir grandes esfuerzos; pero cuando el movimiento ha de ser lento como cuando se emplea en conducir los carritos porta-piezas en las serrerias, este inconveniente es de poca influencia.

6.º Movimiento rectilineo continuo en rectilineo alternativo.

60. No hay buena solucion directa de esta trasformacion; pero puede siempre trasformarse el movimiento rectilineo continuo en circular continuo por uno de los medios expuestos en el

2º grupo; y despues trasformar este último en rectilíneo alternativo.

La figura 155 representa una solucion directa. En la pieza que ha de tener el movimiento rectilíneo continuo hay practicadas ranuras inclinadas que sirven de guia á un boton saliente que va unido á la pieza que hallándose sugeta lateralmente, no puede menos de tomar un movimiento rectilíneo alternativo. Esta clase de soluciones son defectuosas por los rozamientos á que dan lugar.

7º Movimiento rectilíneo continuo en circular alternativo.

61. Esta trasformacion tampoco se emplea directamente en la práctica porque es mas defectuosa que la que resulta valiéndose de un movimiento circular continuo como intermedio entre los dos rectilíneos. Indicaremos no obstante, algunas de las soluciones directas. Por medio de una ranura practicada en la pieza M N (figª 156) que ha de tener el movimiento rectilíneo continuo, se puede comunicar á una palanca Oc que gira alrededor de un punto exterior O, un movimiento circular alternativo, colocando en el extremo c un boton que se introduce en la ranura de la primera pieza. De los diferentes planos inclinados como

el c.d. (cuya altura es a y la base b) que constituyen la ranura, dependerá la relacion de las velocidades de las dos piezas.

Otro sistema consiste en un bastidor compuesto de dos barras dentadas paralelas (fig.ª 157) suprimiendo alternativamente en ellas varias porciones de dientes, y estando animado de un movimiento rectilíneo contínuo puede trasmitir á una rueda dentada colocada en el interior un movimiento circular alternativo, segun engrane con una ú otra barra. En este sistema la relacion de las velocidades es constante pero tiene los inconvenientes que hemos hecho notar en otros análogos de dar lugar á choques repetidos.

El problema recíproco, esto es, la trasformacion del movimiento circular alternativo en rectilíneo contínuo puede efectuarse en la disposicion de la figura 158 análoga á la de la palanca Lagarousse en que se producen las mismas intermitencias. La fuerza se aplica á la palanca de la derecha, y los dos gancHos que participan de su movimiento hacen avanzar cada vez un diente de la barra horizontal.

La verdadera transformacion usada en las máquinas para evitar las resistencias pasivas que originan todas estas soluciones direc-

tas, consiste en transformar el movimiento circular alternativo en circular contínuo por medio de una biela y manivela, y este en movimiento rectilíneo por medio de una barra dentada, ó de una cuerda que se arrolle á un cilindro.

8.º Movimiento circular alternativo en rectilíneo alternativo.

62. Un ejemplo de esta transformacion se presenta en el balancin de sectores (fig.ª 159) que girando alrededor de su eje O ya en un sentido, ya en otro actua para levantar ó bajar bielas, ó varillas de émbolos, por medio de cadenas fijadas á la vez á los sectores y á las varillas. Este sistema se ha empleado en las máquinas de vapor destinadas á agotamientos, pero se ha reemplazado con ventaja por el siguiente, debido á Wat.

La figura 145 representa el balancin CE de las máquinas de vapor actuales que toma un movimiento circular alternativo en virtud de la accion del vapor en el émbolo G que comunica un movimiento rectilíneo alternativo á la varilla GF. Si el punto de union superior F se articulase en el el extremo mismo del balancin como en E tendria que describir un arco alrededor de D y la varilla no podria permanecer vertical. Wat ha fijado la articulacion F de la varilla á uno de los vértices del paralelogramo F E N R arti-

culado en sus ángulos, ó mas bien á la traviesa que reune los vértices de dos paralelógramos iguales que abrazan el balancin de una parte y otra de sus caras verticales. Dos vértices N, E de estos paralelógramos (que en adelante consideraremos como uno solo) estan situados en el eje de simetria CE del balancin, y el cuarto H está guiado por una varilla HS que gira al rededor del centro S fijado de manera que F permanezca sensiblemente sobre una misma vertical. Veamos como se determina la posicion de S cuando está dado el paralelógramo, la varilla del émbolo y el balancin.

Sean (fig.ª 160) A'O, A"O las posiciones estremas del balancin; AO su posicion intermedia ú horizontal, y BG la direccion de la varilla del émbolo. Se trazarán los tres paralelógramos A'B'C'D', A"B"C"D" y ABCD correspondientes á las posiciones anteriores, es decir, tales que los vértices B'B"B permaneciendo sobre la vertical B'G, los lados que unen los vértices de las mismas letras respectivamente sobre cada uno de los paralelógramos sean iguales. Resultarán tres posiciones C'C"C del estremo de la barra directriz FC, y se hará pasar un círculo por los tres puntos C'C"C cuyo centro F se tomará para punto fijo de esta barra. Esta solucion no es rigorosa, porque si se construye un gran número de po-

siciones del paralelogramo con la condicion que todos los vértices B se hallen en la misma vertical B'G se verá que el vértice C no permanece en un verdadero arco de círculo. Luego recíprocamente obligando al vértice C á recorrer el círculo cuyo centro es F, el vértice B no permanecerá constantemente en la vertical B'G. Pero eligiendo los datos convenientes se puede hacer que las desviaciones del punto B respecto á la vertical sean muy pequeñas, ó no pasen de una ó dos líneas.

Para obtener esta desviacion no hay mas que imaginar que el vértice B del paralelógramo queda libre y dirigir el paralelogramo obligando á C á permanecer sobre el círculo C'C"C hallado anteriormente; despues se trazará la línea que pasa por todas las posiciones del vértice B intermedias á las B' B B" que serán las únicas que quedarán sobre la vertical. Se hallará que esta línea forma una especie de S (figª 161) que corta la vertical B'B" en B y que se separa de ella simétricamente cantidades cb, c'b' que será fácil medir.

63. Hay algunas reglas que observar para que la desviacion sea la menor posible:

1ª La direccion vertical B'G' (figª 162) de la varilla debe dividir) en partes iguales la distancia Aa comprendida entre el arco y la cuerda del arco A'A A" descrito por el extremo A del

balancin.

2.ª La cuerda A'A" que es sensiblemente igual á la carrera del émbolo, no debe exceder mucho á la mitad ó los dos tercios de la longitud AO del balancin, es decir que AO debe exceder vez y media lo menos, la longitud de la escursion de la varilla.

3.ª Se tomará la longitud de los lados no paralelos al balancin, de manera que el estremo B' (fig.ª 160) de la varilla esté sobre la horizontal B'O del centro del balancin cuando este ocupe la posicion superior A'O.

4.ª La horizontal OB' debe dividir en dos partes iguales el ángulo total descrito por el balancin.

5.ª En cuanto á la longitud de los lados A'D' y B'C' es arbitraria, ó mas bien, depende de la distancia á que se quiera colocar el centro F; porque cuanto mas se aproxime C'D' al centro O del balancin, menor será el arco descrito por C' y mas corta será la barra FC'.

A veces, cuando se quiere conducir simultaneamente dos varillas B'G y b'g (fig.ª 163), se forma un paralelógramo a'b'c'D' interior que tiene dos lados c'D' y a'D' comunes con el grande y cuyo vertice b' que sirve de suspension á la segunda varilla está sobre la recta OB' que une el vertice B' al centro del balancin; porque hallán-

dos las líneas B'O y b'O en relacion constante, b' describirá una recta, si B' la describe, y no habrá necesidad mas que de la misma barra C'F. Se podria fijar una tercera varilla al punto b'' de encuentro de B'O con el lado opuesto C'D'.

Se puede simplificar la construccion del paralelógramo suprimiendo los lados AD, DB y BC (fig.ª 164), y limitándole á un solo lado AC guiado en C por la barra FC. El punto de union de la varilla bg que hay que mover verticalmente se coloca en b sobre el lado AC en su punto de encuentro con la línea tirada del centro O al punto B que seria el vértice de un verdadero paralelógramo. La construccion para obtener el centro F de la barra es muy sencilla: porque siendo b'g (fig.ª 165) la vertical dada, se tiran por las posiciones superior, inferior y horizontal del extremo A del balancin, rectas tales que el punto de union esté en b' b'' y b sobre la vertical b'g y se prolonga cada una en las porciones b'c', b''c'' y bc iguales al resto bc del lado Ac; el punto F de rotacion de la barra será el centro del círculo que pasa por los extremos c' c'' y c.

Hay otros sistemas de balancines que pueden servir para hacer el movimiento de las varillas sensiblemente vertical. Uno de ellos es el de Olivier Evans. Se reduce á dos varillas (fig. 166); la una D'B susceptible de girar alrede-

dor de B pudiendo este punto tomar un movimiento horizontal segun B'A. La otra varilla es la AC' cuya longitud es la mitad de la D'B y está articulada en su extremo C' que es el punto medio de la D'B, y en su otro extremo A en un punto fijo de la horizontal que pasa por B. Segun esta disposicion el punto D' describe en su movimiento la recta vertical AD', porque en cualquiera posicion del punto C' el ángulo D'AB será recto, pues que los tres puntos D', A, B, se hallarán en la circunferencia descrita desde C' y con un radio $AC' = \frac{1}{2} AB'$.

Terminaremos lo relativo á la transformacion del movimiento circular alternativo en rectilíneo alternativo por un sistema muy sencillo que puede emplearse útilmente en mover una bomba. Consiste en una palanca BO (fig. 167) á que se comunica el movimiento alternativo en el extremo B, y por su otro estremo se introduce en la abertura rectangular que tiene la varilla LM y se une por articulacion con una palanca F que gira alrededor de su ege inferior rs ligado á la varilla, la cual toma un movimiento rectilíneo alternativo en sus guias m. Esta disposicion se emplea generalmente en las prensas hidráulicas.

9.º y 10.º Movimiento circular ó rectilíneo alternativo en movimiento de la misma especie.

64. Aquí será inútil indicar las transformaciones del movimiento circular alternativo, en circular alternativo, ni la del rectilíneo alternativo en rectilíneo alternativo, porque los medios que transforman el movimiento circular alternativo ó el rectilíneo alternativo en circular contínuo, resuelven la cuestion perfectamente. Existen, sin embargo, algunos medios directos de verificar esta transformacion. El torno de resorte movido ordinariamente con el pié (fig. 168) es un ejemplo de transformacion del movimiento circular alternativo en otro circular alternativo; porque la palanca D C le transmite al torno K por medio de la cuerda c b a arrollada varias vueltas en el tambor A M y está unida al resorte B por su extremo a.

Otro ejemplo de esta transformacion se obtiene por medio de los engranages combinados exterior é interiormente como representa la figura 172 que es la disposicion empleada para mover las sierras destinadas á cortar los pilotes despues de introducidos.

El movimiento rectilíneo alternativo se comunica por los sistemas conocidos de los torniquetes de las campanillas. La figura 169 representa esta disposicion cuando las

dos cuerdas ab, cd estan en el mismo plano; y la figura 170 la relativa al caso en que dichas dos cuerdas estremas no estan en el mismo plano: entonces hay que reunirlas por una recta comun ef y colocar dos torniquetes uno en el plano de ab y ef, y otro en el de ef y cd.

En fin, este mismo movimiento se trasmite tambien por ejes de mayores dimensiones que llevan palancas angulares unidas por bielas (fig. 171) articuladas. Pero todos estos sistemas dan lugar á rozamientos sumamente grandes, el juego de las articulaciones se aumenta, y se originan choques que acaban por desarreglar la maquina. Por esta razon se prefiere siempre transformar el primer movimiento alternativo en circular continuo, y este en el otro movimiento alternativo que se desea obtener.

III

Modificadores instantáneos del movimiento.

65. Se llama modificador instantáneo del movimiento toda pieza destinada á cambiar á voluntad y de repente el movimiento de una ó muchas piezas de la maquina. Se pueden clasificar segun su objeto, en los grupos siguientes:

1.º Piezas que sirven para producir ó interrumpir el movimiento, ó lo que es lo mismo, embragar ó desembragar otras piezas.

2.º Piezas para cambiar el sentido de rotacion de un arbol.

3.º Piezas para cambiar la velocidad del movimiento.

4.º Piezas para cambiar el movimiento por intérvalos.

Antes de dar á conocer los principales mecanismos destinados á modificar el movimiento, recordaremos que una rueda puede estar colocada en un arbol de tres modos diferentes, ó fija con él y por consiguiente participando de su movimiento de rotacion, ó libre por deslizamiento, cuando girando con el arbol tiene ademas facultad de deslizar á lo largo de él, como sucede cuando la seccion del arbol es poligonal (fig. 173) como la 1 ó bien circular pero con una lengüeta como la 3: y por ultimo, puede estar la rueda loca sobre el arbol, es decir, que no participa de los movimientos de rotacion de este, como sucede cuando la seccion es circular y no se colocan cuñas de presion.

Embrague de ruedas dentadas.

66. La figura 174 manifiesta el medio de desembragar, ó desengranar dos ruedas dentadas:

A es una rueda fija que engrana con otra libre por deslizamiento: esta última lleva un manguito C con una garganta en la cual entra una palanca E D que actúa contra los rebordes del manguito por una parte redondeada a, y gira alrededor del punto D. Obrando en E sobre esta palanca se hace que engranen ó desengranen las dos ruedas. Pero este medio no puede aplicarse sin peligro de que se rompan los engranages, mas que cuando la máquina empieza á moverse ó cuando la velocidad es muy lenta.

A fin de evitar este peligro de rotura se ha imaginado hacer la segunda rueda B (fig. 175) loca é independiente del manguito. Este último es móvil por deslizamiento sobre el eje y se aproxima ó se separa de la rueda B por una palanca como anteriormente. El manguito termina en un disco que lleva dos espigas salientes d destinadas á introducirse en dos agugeros de la rueda dentada B, la rotura en este caso se produciria en las dos espigas d.d mas bien que en los dientes de las ruedas.

La disposicion mas ordinaria de embragar el manguito y la rueda, es la representada en la figura 176 y en las proyecciones de la figura 177. La rueda termina en un platillo M con partes

salientes convergentes hácia el centro que se introducen en cabidades análogas hechas en el platillo N que forma cuerpo con el manguito C.

67. Otro medio de hacer embragar las ruedas es por los conos de friccion. Se fija á la rueda R (fig. 178) un tambor cónico A y al manguito C otro tambor B que entra en el interior del otro cono cuando por medio del manguito se les aproxima con fuerza. Aquí se puede trasmitir poco á poco el movimiento de rotacion á la pieza que le ha de recibir, aumentando gradualmente el rozamiento de los conos por la presion ejercida sobre el manguito. Esta puede llegar á ser demasiado considerable en máquinas poderosas. En efecto, sea P el esfuerzo que hay que comunicar referido al radio medio del cono correspondiente á la circunferencia en que suponemos se hallan repartidas las componentes q (fig. 179) de las presiones; siendo Q la presion total, el rozamiento que trasmite el esfuerzo es fQ y se tendrá $P = fQ$. La presion Q puede ser muy considerable, y con mayor razon el esfuerzo segun el eje del cono, que llamándole F y α al ángulo de la generatriz AB con dicho eje, será $F = \frac{Q}{\text{sen}\,\alpha}$ de donde $P = fF\,\text{sen}\,\alpha$: lo que demuestra que cuanto mas agudo es el ángulo de los conos, y mas asperezas presen-

tan las superficies en contacto, mayor accion ejercerá el esfuerzo F del manguito para producir el rozamto. necesario.

Tambien puede disponerse un sistema de embrague que no permita la comunicacion de un esfuerzo superior á un límite determinado porque llegado á él se verifica la desunion espontáneamente. Para esto el arbol se interrumpe en un punto de su longitud y sus dos porciones A y B (fig. 180) se reunen del modo siguiente: La parte A terminada por un disco circular viene á aplicarse contra el estremo de la parte B dispuesto de un modo análogo pero de menor diámetro. Entre los dos discos se coloca un cuero bb y todo se aprieta con los tornillos dd. Mientras el esfuerzo no es muy considerable se transmite bien el movimiento, pero si una resistencia casi absoluta se opone á él, deslizan los discos venciendo el rozamiento.

68. Los manguitos de embrague se manejan por medio de palancas como indica la figura 176, ó por un sistema de palancas cuando es necesario aumentar el esfuerzo; pero hay un medio de desembragar por la accion de la máquina misma, representado en la figura 181. Consiste en practicar en la superficie del manguito C una ranura en hélice

en la cual se puede hacer entrar un boton e unido á una especie de palanca a d b que puede girar alrededor de dos puntos fijos a y b. Desde q.e el boton entra en la hélice el movimiento de rotacion obliga al manguito á deslizar á lo largo del arbol hasta que le desembraga de la rueda D que es loca, y del arbol E en seguida.

El embrague de tambores ó poleas movidos por correas sin fin se verifica por el mecanismo indicado en la figura 182. Se colocan sobre el arbol dos poleas inmediatas é iguales: una A loca y otra B fija con el arbol, y se hace pasar la correa de una á otra polea por medio de una palanca a b que termina en forma de horquilla b, segun se quiera interrumpir ó comunicar el movimiento de rotacion al arbol.

Tambien se desembragan las poleas cuando los ramales de la correa son verticales por medio del rodillo de tension. Separando este de la correa (fig. 183) queda separada de la polea inferior A que es la motriz, y cesa de trasmitir el movimiento á la polea B. Pero si las correas no fuesen verticales no convendria emplear este mecanismo, porque entonces la correa quedaria rozando contra la polea motriz.

Se puede tambien embragar ó desembra-

gar las ruedas haciendo movil el eje de una de ellas, ó susceptible de un movimiento de traslacion. — Si las ruedas se comunican el movimiento por cuerdas ó correas sin fin verticales ó por medio de engranages, basta levantar ó bajar ligeramente el eje de la rueda superior, ó mas bien el porta-cojinete por medio de una palanca.

A veces tambien se hace marchar el arbol de la rueda paralelamente á sí mismo resbalando los cojinetes sobre guias. El movimiento se comunica á los cojinetes I (fig. 184) por medio de barras dentadas C manejadas por crics. Las barras llevan en sus extremos mandíbulas M que abrazan el arbol exteriormente á los cojinetes: las ruedas de los crics se mueven simultáneamente y se sujeta el arbol en su nueva posicion por pasadores O.

Medios de cambiar el sentido de rotacion de un arbol. Medios de cambiar la velocidad.

69. Cuando se quiere cambiar á voluntad el sentido de rotacion de un eje, basta colocar un manguito de desbragamiento sobre este eje susceptible de embragar sucesivamente por cada extremo con dos ruedas locas montadas sobre este arbol y animadas cada una de un movimiento de rotacion en sentido contrario. Sean

C y D (fig. 185) dos ruedas fijas que marchan en el mismo sentido y engranan en las ruedas A y B locas sobre un eje; de suerte que cada una de estas últimas gira en direcciones diferentes sin arrastrar consigo al arbol en que estan colocadas. E F es un manguito armado de dientes en sus estremos que desliza sobre el arbol de las ruedas A y B. Si se le aplica sobre la rueda A, esta hace girar el manguito y el arbol consigo: si se aplica hacia la B el arbol toma el movimiento de esta rueda. Este sistema se ha establecido en Clichy, cerca de Paris y sirve para hacer mover sobre un laminador de plomo grandes planchas, ya en un sentido ya en otro. Aquí el movimiento es muy lento y permite embragar y desembragar sin detener el motor, porque la velocidad es muy pequeña, así como el momento de inercia del laminador.

El manguito doble sirve tambien para trasmitir fácilmente el movimiento de rotacion á un eje perpendicular al de la rueda motriz ya en un sentido ya en otro. Ya vimos un ejemplo en la figura 11 (lam.ª 2): suponiendo en ella que sea Q la rueda motriz fija á un arbol, y que engrana con dos ruedas N y M locas sobre el arbol O, se podrá cambiar el sentido del movimiento de este último se-

que se embrague el manguito I. con una ú otra de las ruedas M ó N.

70. Para cambiar la velocidad del movimiento de un arbol hay varios mecanismos de los cuales hemos dado ya á conocer algunos. Tal es el de la figura 108 en que trasladando la correa á cada uno de los pares de poleas montados en dos ejes paralelos, se cambia la relacion de las velocidades angulares de estos ejes. Este sistema puede reemplazarse por dos troncos de conos igualmente montados en ejes paralelos y abrazados por una correa que puede deslizar á lo largo de sus ejes: basta para ello que estos sean paralelos así como sus generatrices esteriores ó mas distantes. La velocidad puede variar de un modo instantáneo haciendo marchar la correa con una palanca de horquilla.

El sistema de la figura 114 se presta tambien á esta variacion de velocidades si suponemos que el eje horizontal de la rueda vertical puede acercarse ó alejarse al otro eje, variando así el punto de contacto entre las dos ruedas, variaria la velocidad de la primera.

Medios de cambiar el movimiento por intér valos.

71. Hemos dado los medios de modificar de una manera constante ó permanente el movimiento de las máquinas: vamos á indicar otros que sirven para cambiarle por intérvalos.

Uno de los medios es por las ruedas de escape: consiste en una rueda loca B (fig.ª 186) montada sobre un arbol que recibe un movimiento de rotacion por una manivela. A este árbol está fija la pieza A susceptible de engancharse en el estremo b de una palanca ab, y móvil alrededor de un eje m que forma cuerpo con el platillo de la rueda. En fin, un resorte s mantiene el estremo b enganchado en la pieza A. Si se supone el arbol en movimiento en el sentido de la flecha M, la pieza A le seguirá y no tardará en engancharse en el rebajo b; despues arrastra consigo á la palanca ab con la rueda B, que hace subir un peso ó un embolo por medio de una cuerda D arrollada en su garganta. Pero en el momento que la palanca ab encuentre un tope esterior E esta palanca gira alrededor de su eje m y queda abandonada de la pieza A, asi como de la rueda B. Esta, solicitada por el peso que ha levantado toma un movimiento en sentido con-

trario sobre el eje que continua el suyo en el sentido del de la manivela y el peso vuelve á bajar. Esto se reproduce en cada revolucion.

Un sistema análogo se emplea en las máquinas para dejar libre en lo alto de su carrera á la maza destinada á introducir los pilotes; pero el movimiento es rectilíneo en vez de ser circular. La maza de hierro fundido está representada en A (figª 187): lleva un anillo d en el cual entra el gancho f de una palanca e f. Esta palanca gira alrededor de un eje g colocado en una especie de tubo L M, al cual va unido un resorte que obliga á la palanca á introducirse en el anillo d. El esfuerzo aplicado á la cuerda superior levanta la maza hasta que la palanca e f llega á tocar un tope B. Entonces la palanca e f gira alrededor de su eje g, el gancho f sale del anillo d, y la maza cae en virtud de su peso: soltando en seguida la cuerda cae la pieza L M y por el choque de la palanca contra el anillo se vence la accion del resorte y vuelve á quedar enganchada la maza. Este mecanismo se ha modificado (fig. 188) empleando dos palancas semejantes á la anterior que giran alrededor de un mismo eje y estan oprimidas cada una por un resorte.

72. La rueda catalina suministra el medio de que un eje pueda girar en un sentido sin

que pueda retroceder en el sentido opuesto.

Sea C (fig. 189) una rueda loca sobre su arbol, y B una rueda catalina fija á este mismo arbol, en cuyos dientes puede engranar una pequeña palanca ó escape b a d fijo á la rueda loca C, y oprimido en su extremo d por un resorte ec fijo en e. El juego de este escape es tal que si se hace mover de izquierda á derecha la rueda catalina B así como su arbol, este sistema girará independientemente de la rueda C que permanece en reposo. Pero si, por el contrario, la rueda B recibe un movimiento de derecha á izquierda, los dientes de esta se engancharán en la palanca b a d, y la rueda loca C tendrá que seguir el movimiento de la rueda catalina y de su arbol.

Esta clase de ruedas se emplea en los reloges. Fijada á un arbol, el escape no impide su movimiento en el sentido en que se la hace girar con una llave para arrollar el resorte motor. Pero desde que este último ejerce su accion, la rueda catalina gira en sentido contrario al anterior, y arrastra consigo la rueda loca destinada á trasmitir la accion motriz del resorte á las demás piezas.

Los frenos de talon sirven tambien para detener el movimiento rectilíneo de una pieza. Sea esta la AB (fig. 190) q.e se puede mover con libertad entre sus guias a b: es posible mantener

esta pieza á una altura determinada por medio del excéntrico de talon movido con una palanca S, que la impedirá descender ejerciendo una presion considerable entre el excéntrico y las guias.

Otros escapes empleados en los reloges pertenecen tambien á la clase de modificadores que nos ocupa; pero tienen mas particularmente por objeto regularizar el movimiento.

IV.

De los motores animados. (a)

Circunstancias particulares de la accion de los motores animados.

73. Los motores animados difieren de los motores únicamente sometidos á las leyes de la física, en que no pueden actuar de una manera contínua, que son susceptibles de cansarse al cabo de cierto tiempo de ejercicio y se ven obligados á tomar un descanso mas ó menos largo. La cantidad de trabajo que pueden desarrollar diariamente varia segun la manera de funcionar y segun las circunstancias; pero en cada caso es susceptible de un máximo igualmente que en los demás motores, para una misma fatiga diaria; en una

(a) Traducido de la Mecánica aplicada á las máquinas de M. Poncelet

palabra, existe una velocidad del punto de aplicacion, un esfuerzo, y una duracion de trabajo, que son las mas convenientes para el efecto útil (nº 25 secc.n 1.a)

Llamemos en general V, la velocidad media en metros y por segundo, del punto de aplicacion del motor; P el esfuerzo medio en Kilog.s que ejerce en sentido de este camino, en fin T la duracion total en segundos, de la accion diaria que puede ser continua; ó interrumpida por reposos mas ó menos frecuentes, que suelen llamarse altos, cuya duracion no está comprendida en T; la cantidad de trabajo desarrollada por el motor, tendrá evidentemente por medida el producto PVT.$^{K.m}$

A propósito de esto, es necesario recordar que segun los principios hasta aquí espuestos, el trabajo mecánico puede medirse en un punto cualquiera de la transmision del movimiento, con tal que el esfuerzo se mida en sentido del movimiento; ó que el camino descrito se aprecie en sentido del esfuerzo, y con tal tambien que pueda despreciarse el trabajo de las resistencias pasivas, entre el punto en que se mide el trabajo y aquel en que el motor funciona realmente, así como sucede en muchas ocasiones; ó bien que se tome en cuenta aquel trabajo por los métodos indicados en el cálculo de las resistencias pasivas.

Esto supuesto, el producto PVT^{Km}, que se llama

cantidad de trabajo diario, es como hemos dicho susceptible de un máximo, con una misma fatiga diaria, dando á P á V y T valores que una larga esperiencia indica como mas convenientes. En ningun caso se puede hacer trabajar al motor con un esfuerzo y una velocidad que escedan los límites dados igualmente por la esperiencia, y no es posible tampoco aumentar la duracion T del trabajo diario mas allá de cierto término, por pequeño que sea por otra parte el trabajo PV desarrollado en cada segundo. Esta duracion límite parece ser de 18 horas á lo mas por dia, ó sea del doble de la duracion ordinaria y mas ventajosa del trabajo.

Por lo que toca al límite del esfuerzo, varia entre el triple y quintuplo del que conviene al máximo efecto segun las circunstancias ó duracion mas ó menos prolongada de este efecto. En fin, la velocidad límite parece variar tambien en razon de la duracion total del movimiento y estar comprendida entre 4 y 10 veces la velocidad mas conveniente al trabajo.

Por lo demas, entre estos límites estremos, los motores animados tienen la facultad de hacer variar, arbitrariamente, por decirlo así, su esfuerzo y su velocidad, con tal que, cuando uno aumenta, disminuya la otra, y que ámbos y otro esceden al esfuerzo y la velocidad mas

convenientes, la duracion T del trabajo diario será menor (*)

En efecto, el producto PVT, en semejantes casos, nunca puede llegar á su valor máximo, sin que la fatiga diaria del animal se aumente y sin que se comprometa su salud, si se renueva este trabajo muchos dias consecutivos. Esta facultad que tienen los animales de poder aumentar, hasta cierto punto, la cantidad de trabajo PV que desarrollan en cada segundo, es muy útil en ocasiones á la industria manufacturera. Pero no se debe olvidar que debe interrumpirse la duracion total del trabajo por frecuentes reposos, y que en fin el efecto util diario PVT que se podrá esperar de semejante empleo del motor, será menor que el que se obtendria de un trabajo mejor arreglado.

Ventajas de la accion continua de los motores animados sobre la accion intermitente.

74. Es cierto que algunos autores, y Coulomb entre otros, opinan que en ciertas clases de trabajos como el que consiste en clavar pilotes, tocar una cam

(*) En las memorias de la academia de Berlin, año 1783, se halla una fórmula que Euler propuso, para ligar el esfuerzo y la velocidad máximos del hombre á un esfuerzo y velocidad cualquiera. Coulomb ha propuesto tambien en su tratado de las máquinas simples, páginas 259 y siguientes una relacion entre el peso del hombre y el esfuerzo que puede ejercer; pero ninguna de estas fórmulas parece de un empleo seguro y ventajoso en la práctica.

para &c, la manera intermitente de que se trata presenta ventajas particulares, y es susceptible de un efecto util diario mas considerable que si el motor actuase con mas continuidad y con menores esfuerzos ó velocidades. Pero aunque esta manera de actuar sea comunmente obligada por circunstancias particulares en que hay que acelerar el trabajo disminuyendo al mismo tiempo el número de motores que se aplican á la vez, es dudoso que se obtenga aumento de trabajo diario. Hay motivos para creer, por ejemplo, que los hombres que se aplican á una máquina, ejerciendo un esfuerzo de 18 kilogˢ y cuyo trabajo se interrumpe por frecuentes reposos, desarollan un efecto util diario sensiblemente menor que los aserradores que actuan con un esfuerzo de 10 Kilogˢ á lo mas.

Mʳ. Hubert, célebre ingeniero de marina, corresponsal de la academia de las ciencias, ha hecho en el arsenal de Rochefort, experiencias muy repetidas que han mostrado que las cantidades de trabajo diarias desarrolladas por los herreros que dan hasta 2560 golpes con martillos de 7,kil065, se elevaban á cerca de 67000 Km, que es algo menos que el trabajo del que introduce pilotes, porque la velocidad impresa al martillo es muy grande. Ahora bien, resulta de otras observaciones de Mʳ. Hubert, que el trabajo

aumenta sensiblemente á medida que disminuye el peso del martillo, y opina que el martillo de forjar clavos es el que permite la mayor cantidad de trabajo diario con igualdad de fatiga. La razon es porque aquí la accion es mas continua y el trabajo por segundo menor. Se puede admitir sin riesgo de engañarse, que en esta última circunstancia como en la del aserrado á lo largo, el trabajo diario desarrollado por hombres ejercitados puede elevarse á 16000.^{Km}, ó mas del doble del trabajo anterior, sin que resulte un exceso de fatiga.

Resultados de la observacion sobre las cantidades de trabajo de los diferentes motores animados.

75. Estos resultados estan consignados en el cuadro que á continuacion presentaremos tomado de Mr Navier (Arquit.^{ra} hidráulica de Belidor pag.^{s} 394 y sig.^{s}) al que hemos hecho muchas adiciones propias para completarle y para facilitar su aplicacion en algunos casos particulares. Haremos observar con Mr Navier que los datos de este cuadro se refieren á los valores de la velocidad del esfuerzo y del tiempo que parecen mas ventajosos en cada caso especial, y que los resultados no deben mirarse sino como términos medios que pueden separarse mas ó menos de $\frac{1}{4}$ ó $\frac{1}{3}$ del

trabajo efectivo, segun la edad, el vigor de los individuos, el genero de alimento y el clima que habiten. Estas observaciones pertenecen por otra parte á varios autores y con especialidad á Coulomb. Es preciso por último observar que segun lo que precede, se puede sin riesgo de una disminucion sensible del efecto útil diario, hacer variar alguna cosa la velocidad y el esfuerzo indicados en el cuadro, con tal que su producto no varíe y que se establezca en consecuencia de esto la duracion diaria del trabajo.

1º. Cuadro de las cantidades de trabajo mecánico que pueden suministrar por término medio el hombre y otros animales en diferentes circunstancias.

Núm. de órden	Naturaleza del trabajo.	Peso elevado ó esfuerzo medio ejercido	Velocidad ó espacio por segundo	Trabajo por segundo	Duracion del trabajo diario	Cantidad de trabajo diaria
	1º. Elevacion vertical de pesos.	Kilogˢ	Metros	K × m	horas	K × m
1...	Un hombre subiendo una rampa suave ó una escalera, sin carga, consistiendo su trabajo en la elevacion del peso de su cuerpo	65	0,15	9,75	8	280.800
2...	Un obrero elevando pesos con una cuerda y una polea					

Núm. de orden	Naturaleza del trabajo	Peso elevado ó esfuerzo medio ejercido Kilogs.	Velocidad ó espacio por segundo Met.º	Trabajo por segundo K.×m	Duración del trabajo diario horas	Cantidad de trabajo diaria K×m
	lo que le obliga á hacer descender la cuerda de vacío	18	0,20	3,60	6	77.760
3	Un obrero elevando pesos ó levantándolos con la mano	20	0,17	3,40	6	73,440
4	Un obrero elevando pesos, subiéndolos por una rampa suave ó una escalera, volviendo de vacío	65	0,04	2,60	6	56,160
5	Un obrero que eleva materiales con una carretilla subiendo una rampa de $\frac{1}{12}$ y volviendo de vacío	60	0,02	1,20	10	43.200
6	Un obrero que eleva tierras con la pala á la altura media de 1m,60	2,7	0,40	1,08	10	38.880
	2.º Accion sobre las máquinas.					
	Un obrero actuando sobre una rueda de husillos ó tambor:					
1	1.º Al nivel del eje de la rueda	60	0,15	9,00	8	259,200
2	2.º En la parte baja de la rueda ó á 24.º	12	0,70	8,4	8	251,120
3	Un obrero caminando y empujando, ó tirando horizon					

Núm. de orden	Naturaleza del trabajo	Peso de vaor ó esfuerzo medio ejercido Kilog.	Velocidad ó espacio por segundo Metros	Trabajo por segundo K × m	Duración del trabajo diario horas	Cantidad de trabajo diaria K × m
	talmente	12	0,60	7,2	8	207.360
4	Un obrero actuando sobre una manivela	8	0,75	6,0	8	172.800
5	Un obrero ejercitando empujando y tirando alternativamente en sentido vertical	5	1,1	5,5	8	158.400
6	Un caballo enganchado á un carro ordinario y marchando al paso	70	0,90	63,0	10	2268.000
7	Un caballo tirando en un andel ó una noria y marchando al paso	45	0,9	40,5	8	1166.400
8	Un caballo tirando en id. id. y marchando al trote	30	2,0	60,0	4,5	972.400
9	Un buey uncido en id id y marchando al paso	65	0,6	39,0	8	1123.200
10	Una mula enganchada en id. id. y marchando al paso.	30	0,90	27,0	8	777.600
11	Un asno id. id.	14	0,80	11,6	8	334.080

(a) 3.° Efecto útil trasmitido á las ruedas hidráulicas por una caida de agua.

Clase de las ruedas.	Velocidad mas conveniente p.ª el maximo efecto	Relacion del trabajo util al trabajo del motor	Observaciones
			v es la velocidad de la rueda y V la debida á la altura H de la caida del agua
Ruedas de paletas planas ..	$\frac{v}{V} = 0,45$	0,15 á 0,18	Para grandes cargas y pequeñas aberturas de compuerta
		0,20 á 0,25	Para pequeñas cargas
Idem, colocadas en canalizos circulares	$\frac{v}{V} = 0,30$ á 0,80	0,65 á 0,75	Alimentadas por vertederos
		0,50 á 0,60	Cuando la relacion $\frac{h}{H}$ de la altura en que el agua acompaña á la rueda a la altura total no es mas que 0,5 á 0,6
Idem de alaves curvos de M.r Poncelet: .	$\frac{v}{V} = 0,55$	0,45 á 0,55	Con aberturas pequeñas de compuerta
		0, 62	Con aberturas de 0,m20 á 0m30 y presentando una capacidad de admision de agua mayor que 1,5 veces el volumen que llega
Ruedas de cajones	$\frac{v}{V} = 0,30$ á 0,80	[illegible]	Recib.do el agua en la parte sup.r y no excediendo la velocidad de 1m? á 2.m

Clase de las ruedas	Velocidad mas conveniente p.ª el máximo efecto	Relacion del trabajo útil al trabajo del motor	Observaciones
Ruedas horizontales de paletas planas......	$\frac{v}{V}=0,65$ á $0,73$	0,40 0,32	Segun experiencias en los molinos de Toloza (Francia)
Turbinas de Mr Fourneyrou	$\frac{v}{V}=0,70$	0,65 á 0,70	Cuando está completamente abierta la compuerta aun cuando la turbina esté sumerjida en el agua, y su velocidad varie en $\frac{1}{5}$ de su valor anterior
Turbinas de M. Fontaine	$\frac{v}{V}=0,707$	0,57....	La compuerta descubierta en la unitad
		0,62....	Id. descubierta en $\frac{3}{4}$ de su altura
		0,71....	Totalmente descubierta. Pudiendo variar la velocidad en $\frac{1}{4}$ de la anterior sin que cambien sensiblemente estos resultados que se refieren á una turbina de $0^m,4$ de altura colocada en una caida de $1^m,5$ y sumerjida en el agua.

(b) Operadores.

Cuadro de las cantidades de trabajo necesarias para producir diversos efectos útiles.

Naturaleza y cantidad de la obra	Velocidad del operador p.r el num.o de revoluc.s ó golpes en 1'	Trabajo espresado en Kilográmetros	Observaciones sobre el punto en que se ha medido el trabajo
Fábricas de harina			
Un hectólitro de trigo ó 75 Kilog.s molido de un modo ordinario	80 a 90	419.000	En el arbol de las muelas Resultado medio segun Navier. Diametro de las piedras 1,m 5 próximam.te
Un hectólitro de id. id. molido y remolido en parte	Id. y hta 120	628,000	Id. id. calculado aproximadam.te por Navier
Id. id. id. segun el sistema ingles siendo el vapor la fuerza motriz...	110 a 120	802,000	En el arbol del volante. Segun M. Tarey Diámetro de las piedras de 1,m 25 proxim.te
Aserrado de maderas			
Metro cuadrado de encina aserrado á mano	48; á lo mas 80	43,333	Resultado de M.r Navier en sierras de mov.to alternativo

Naturaleza y cantidad de la obra	Velocidad del operador por el núm.° de revol.s ó golpes en 1'	Trabajo expresado en Kilográmetros	Observaciones sobre el punto en que se ha medido el trabajo
Metro cuadrado de encina aserrado á máquina con sierra alternativa	120 a 140	63,000 115.000 ..	Segun M. Coste, medida la resist.a en la sierra En el receptor (Laboulaye)
Id. id. con sierra circular	300 a 500	67.500	En el receptor (Laboulaye)
Bocartes movidos p.r el agua	75 por pilon	2.100	El pilon pesa unos 86k y se eleva unos 0m32. El trabajo es por 1' y las resist.s pasivas le aumentarian en $\frac{2}{5}$
Molino para papel, de cilindros. Por 10 K.s de trapo molido en una hora	180	900.000	
Máquina soplante, por metro cúbico de aire suministrado en 1" á la presion de 8 centim.s de mercurio	"	35 por 1"	Gaudri (Máquinas de vapor.)
Hilados. Para mover los brocas con los telares de preparacion	"	20 á 30 p.r 1"	La obra ejecutada en 12 horas es de unos [illegible] de algodon n.° 20.

Naturaleza y cantidad de la obra.	Velocidad del operador por el número de revoluciones ó golpes en 1'.	Trabajo expresado en kilográmet.s	Observaciones sobre el punto en que se ha medido el trabajo
Laminado de hierro en barras. Por 100.k de barras de 0,m04 de espesor....	"	984.000	En la rueda motriz (según M. Clement)
Gran alisador de cilindro	...	112 á 225 por 1".	Supone un trabajo motor de 1,5 á 2 caballos
Gran torno de ruedas de wagon......	"	"	De 0,7 caballos á 2,5 en el motor
Torno ordinario; máquina de alisar, de cepillar, en condiciones medias	"	"	De 0,2 caballos á 0,40 cada una, en el motor.
Grueso cortador de tigera..............	"	"	De 0,2 caballos á 0,5 d
Martinete de 700 Kil.s	96	36.000	Por 1" en el receptor. (Gandri, maq.s de vapor).
Gran martillo frontal de forja..........	"	"	De unos 20 á 30 caballos en el motor (Gandri)
Laminador de tres pares de cilindros para barras-carriles...	"	"	De 35 á 50 caballos, en el motor (Gandri)

Fin.

Indice de materias.

Primera seccion

Segunda seccion

Pág.

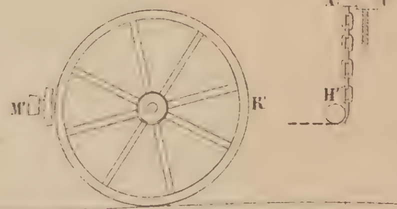
Tercera seccion.

Pag.s

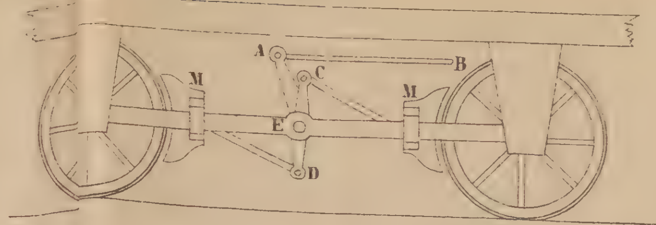
Seccion adicional.

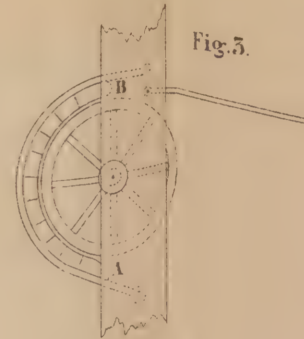
Erratas

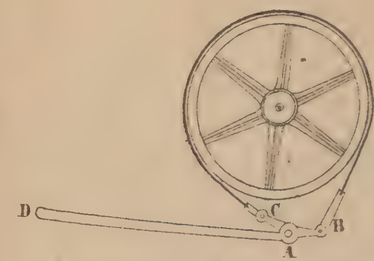
Pág.	Líneas	Dice	Debe decir
7	17	de otro modo	de distintos modos
12	6	$\int Q \cos\alpha$	$\int Q \cos\alpha \, ds$
16	8	aunque	según que
19	15	$\left(-m\frac{dv}{dt}\right)^2_2$	$\left(-m\frac{dv}{dt}\right)^2$
48	7	Por consideraciones ...	(a) Por consideraciones
63	13	$-B\left(\frac{2+n}{8n}\right)^2 + B'\left(\frac{2-n}{8n}\right)^2$	$-B\frac{(2+n)^2}{8n} + B'\frac{(2-n)^2}{8n}$
77	5 (desde abajo)	$d = 1,^m 4$;	$d = 1,^m 50$;
79	8	la otra seccion ...	la última seccion
119	3 (desde abajo)	desde el	desde que el
149	4 (id)	BC'	BC
180	6	$2b\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}F}$	$2b\sqrt{1-\frac{1}{\pi^2}} \times F$
203	13	con barniz	con engrasado
id	18	barniz	engrasado
251	8	tomar r , ...	tomar r_1 ,
280	15	otra polea	otra parte
333	5 (desde abajo)	AB	AM
335	7	tres clases	cuatro clases
338	8	aO'	AO'
346	6 (desde abajo)	hasta Om', Om	hasta $O'm$, Om
349	17	19 vis	19
358	11	AA', Aa'	AA', Aa
360	4 (desde abajo)	OT, $O'T$	OT, $O'T'$
397	1	se escapen	se escapen las correas

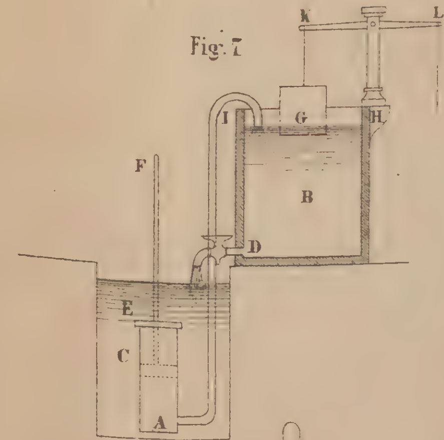


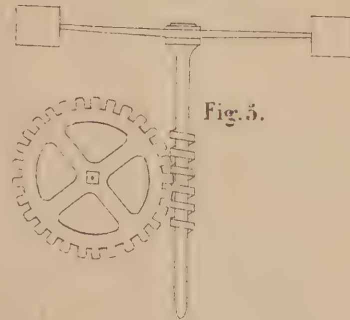


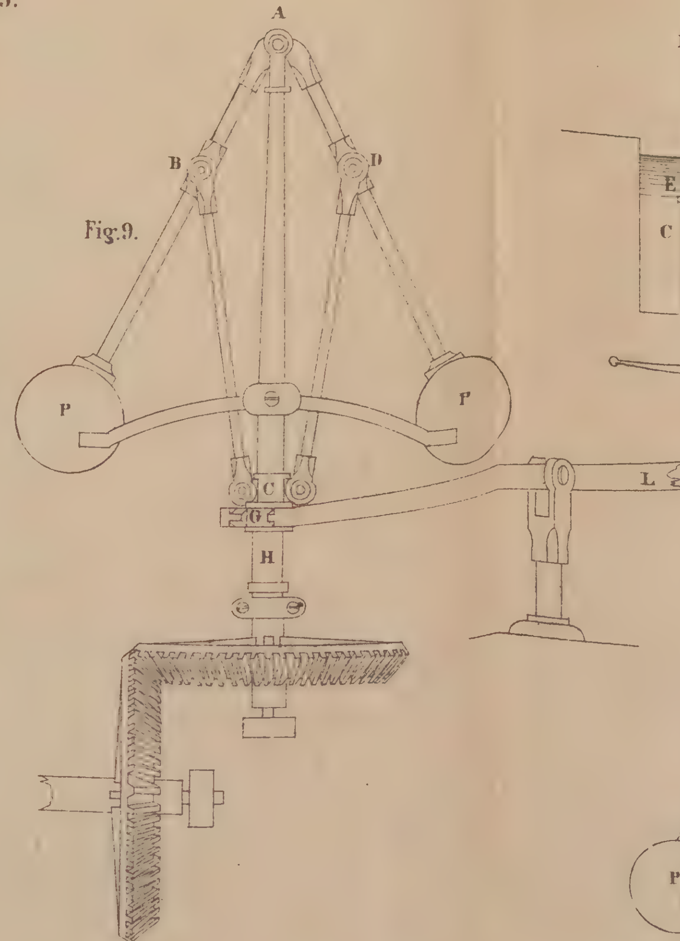


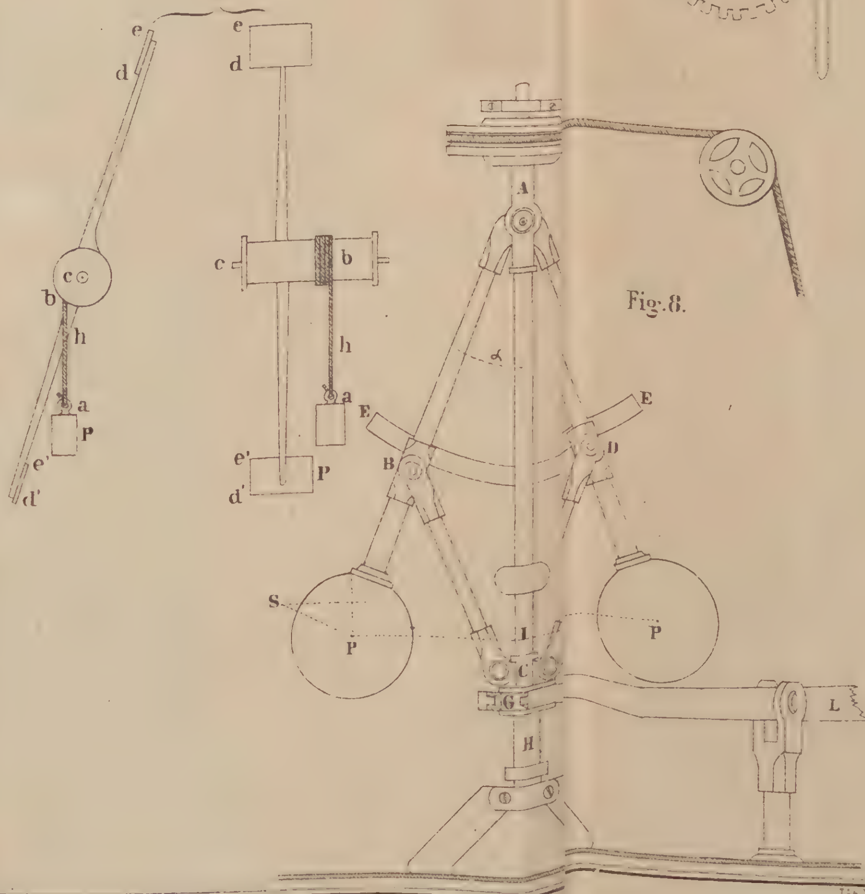


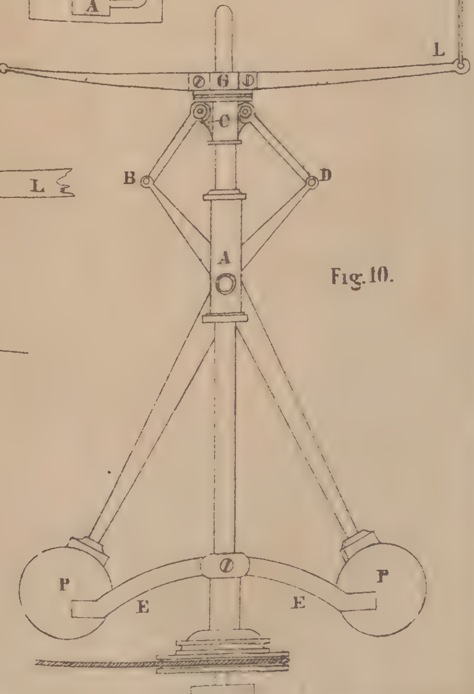




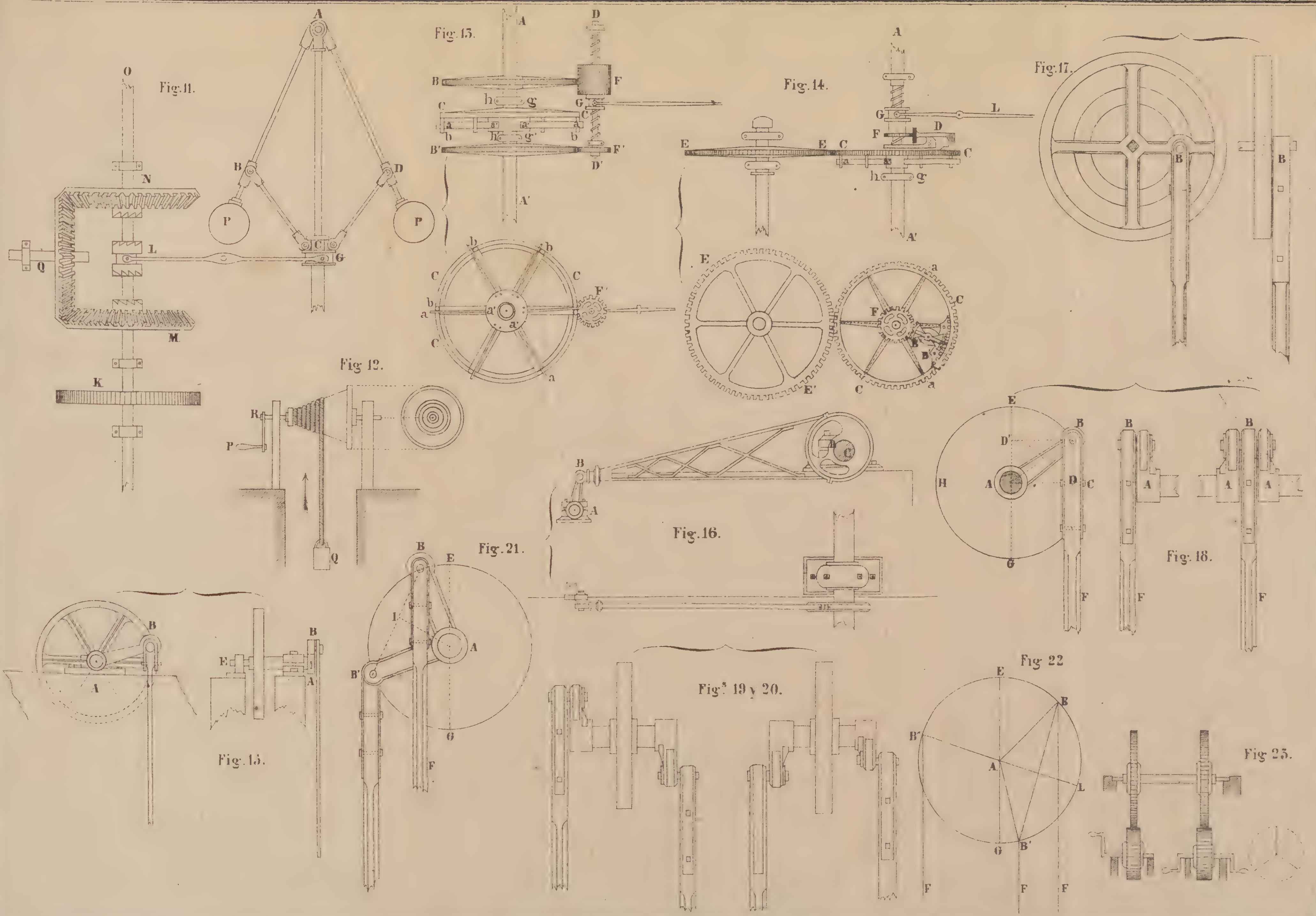




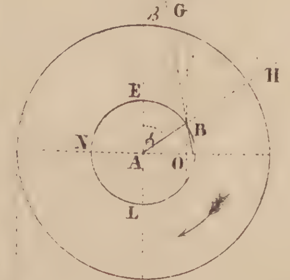


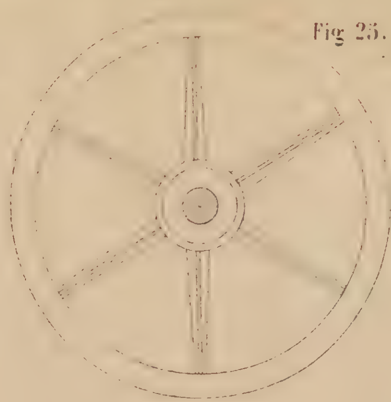


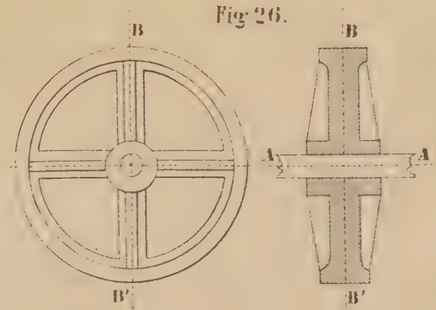
Lit. La Corte. Fuencarral. 5.

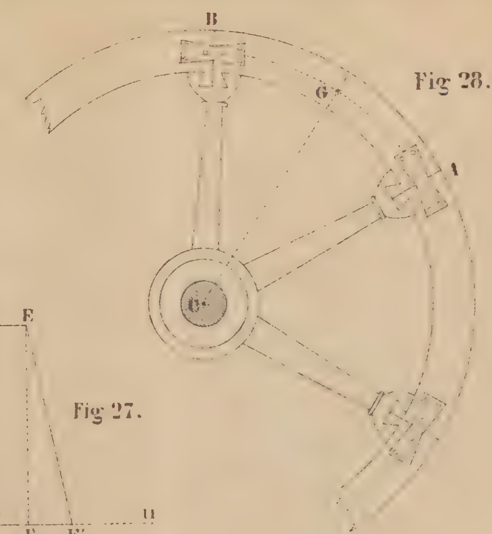


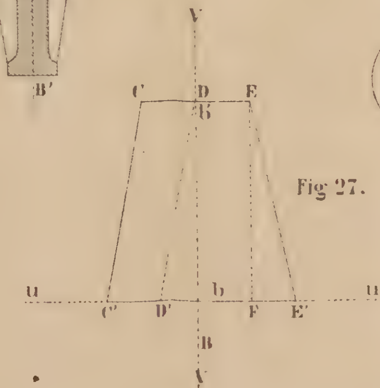
Lit. La Corte, Fuencarral, 6.

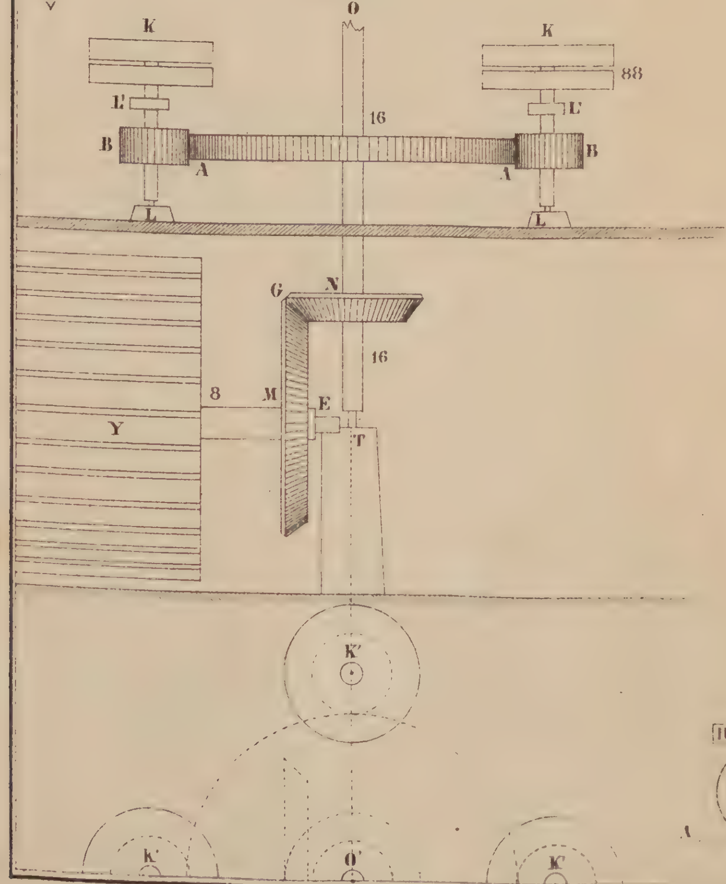

Fig. 24.

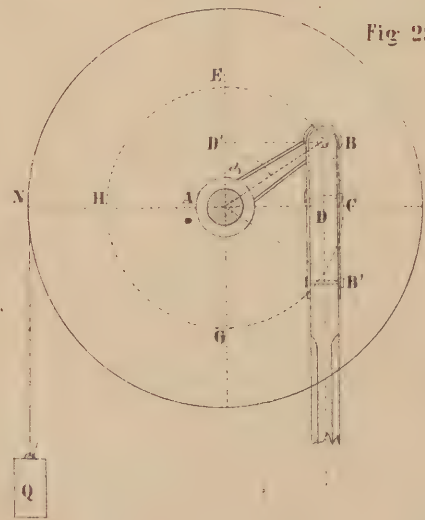

Fig. 25.

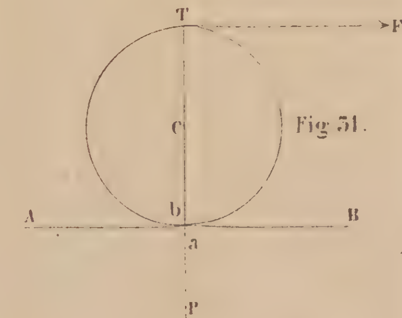

Fig. 26.


Fig. 28.


Fig. 27.


Fig. 30


Fig. 29.


Fig. 31.

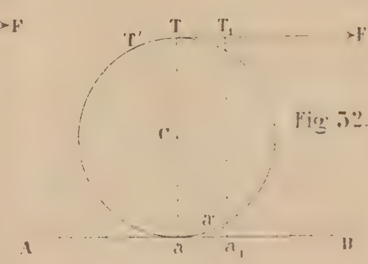
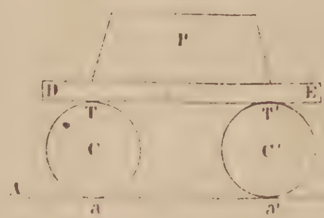
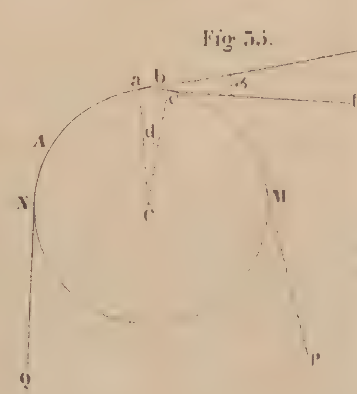
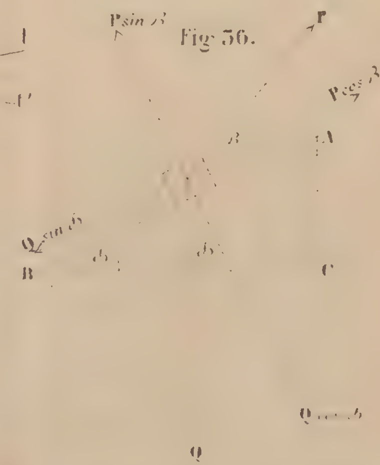
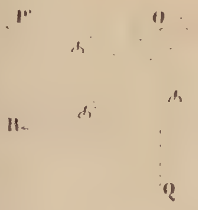

Fig. 32.

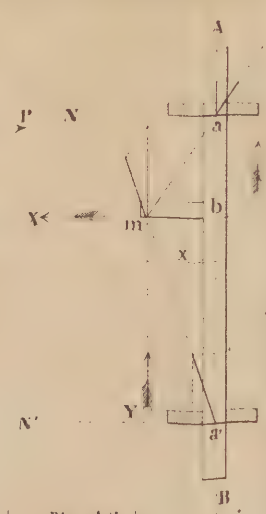

Fig. 34


Fig. 33

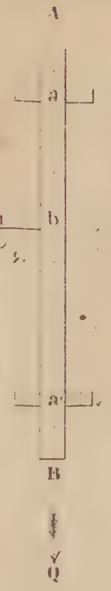

Fig. 35.


Fig. 36.


Fig. 37


Fig. 38.




Fig. 39.

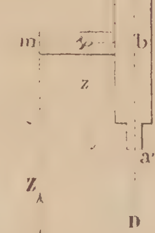



Fig. 40.

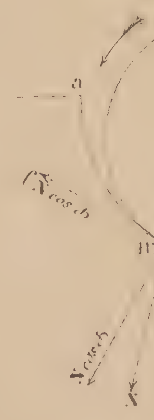

Fig. 41


Fig. 42

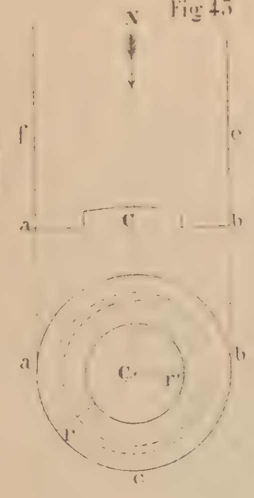

Fig. 43


Fig. 44.

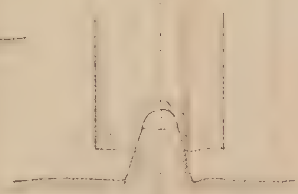

Fig. 45


Fig. 46.

Fig. 47.

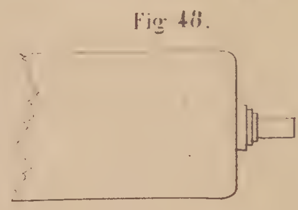
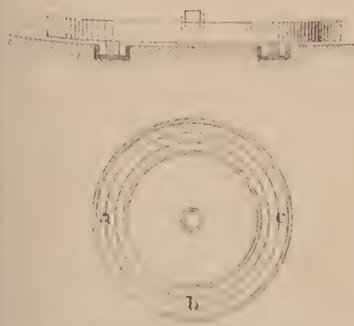
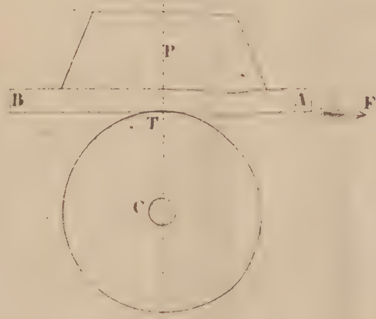
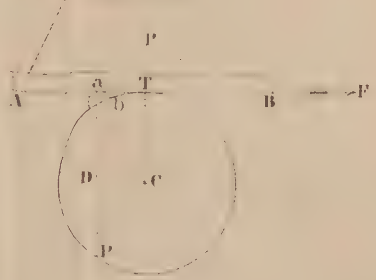

Fig. 48.

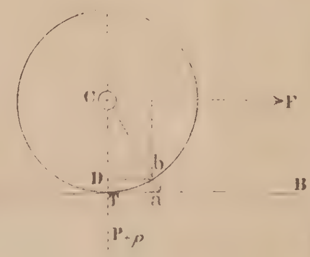

Fig. 49.

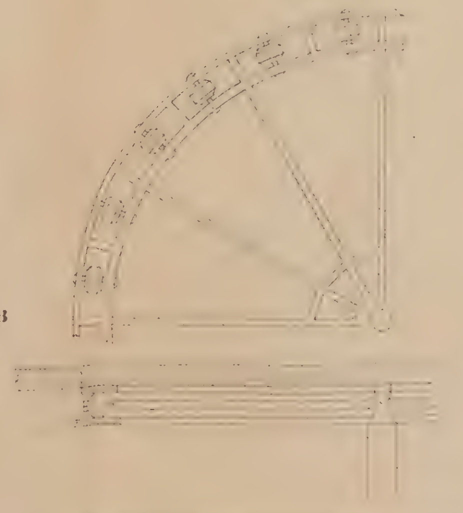

Fig. 50.


Fig. 51.


Fig. 52.


Fig. 53


Fig. 54.


Fig. 55.

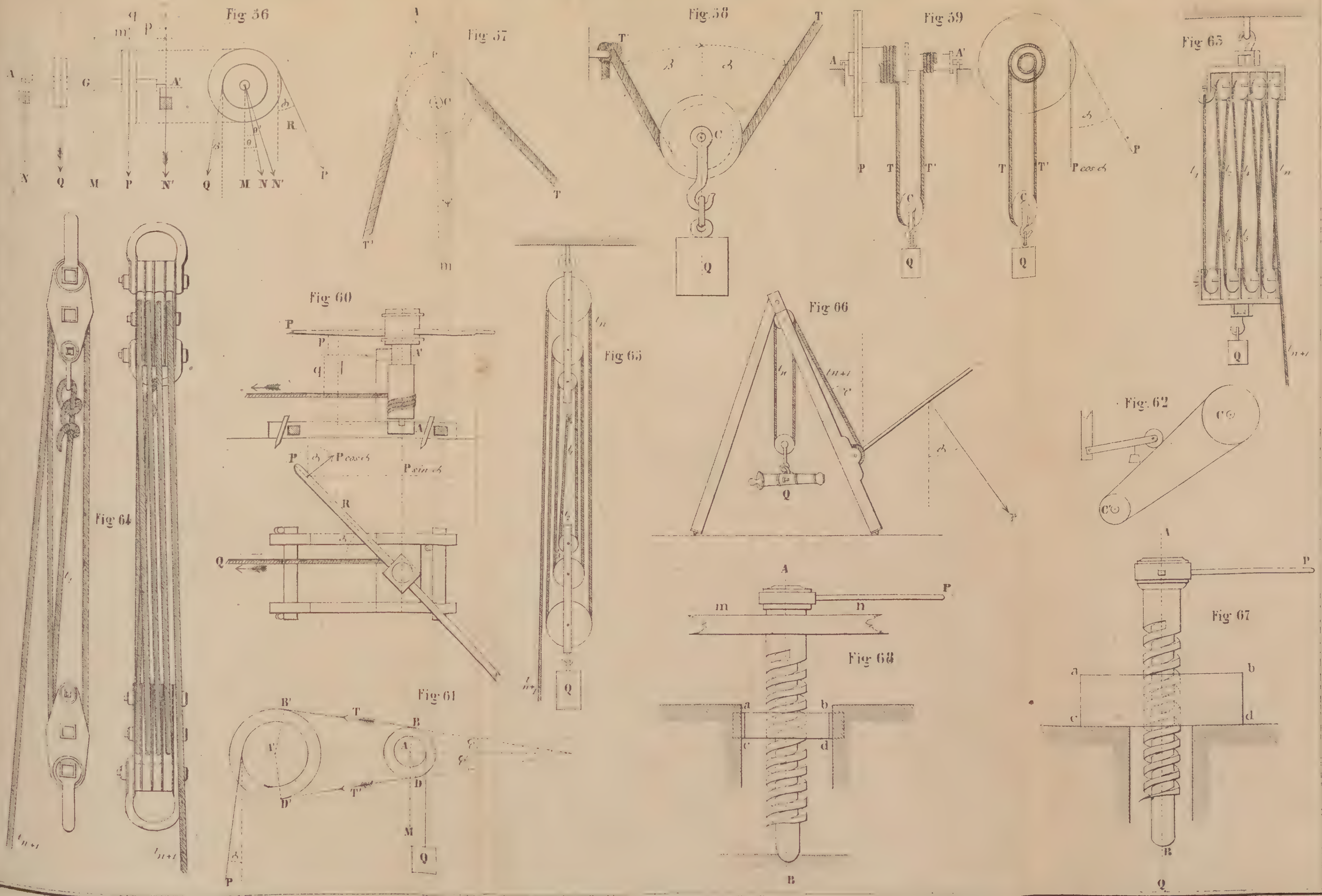


Fig 56
Fig 57
Fig 58
Fig 59
Fig 63
Fig 60
Fig 65
Fig 66
Fig 64
Fig 62
Fig 61
Fig 68
Fig 67

Fig. 69

Fig. 70

Fig. 71.

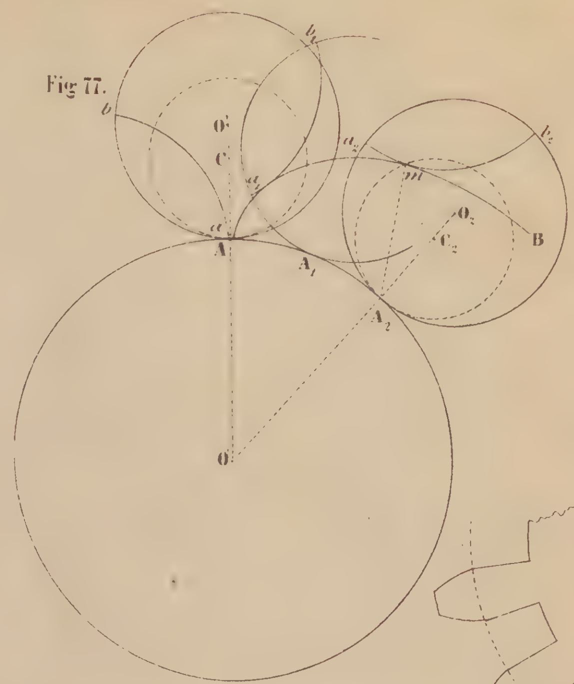
Fig. 72

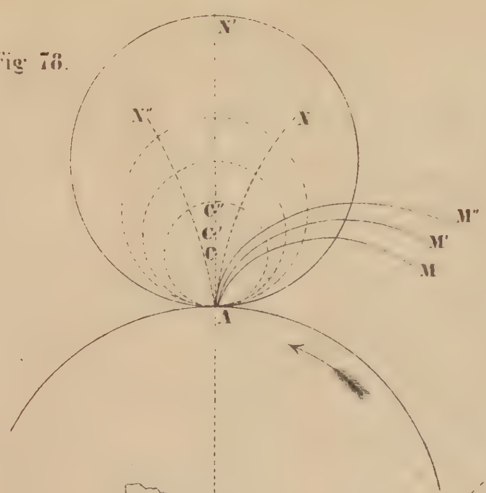
Fig. 73.

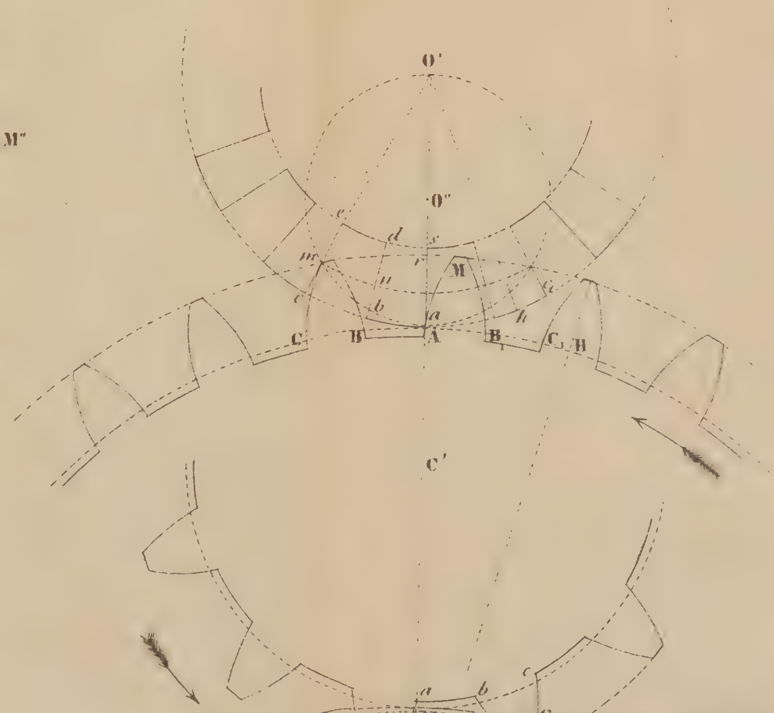
Fig. 74.

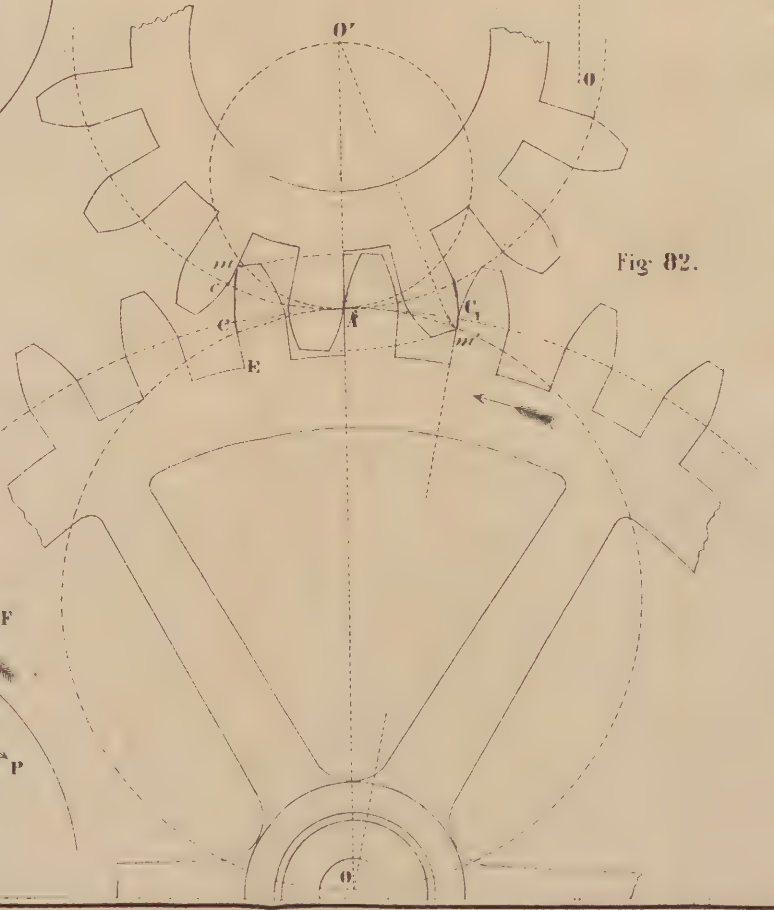
Fig. 75.

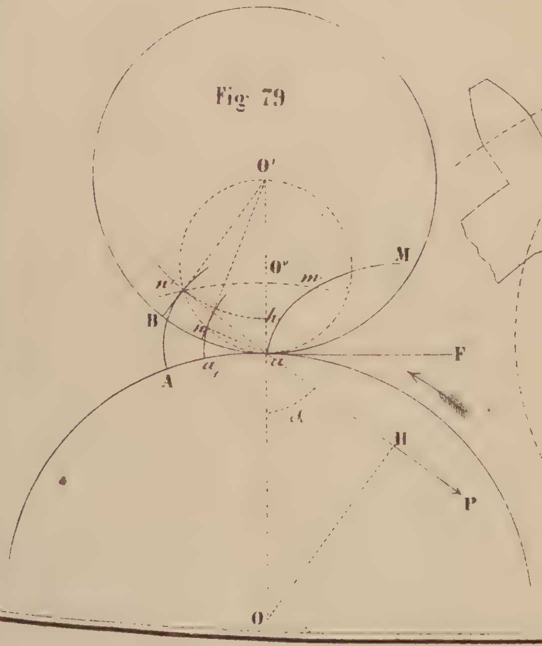
Fig. 76.

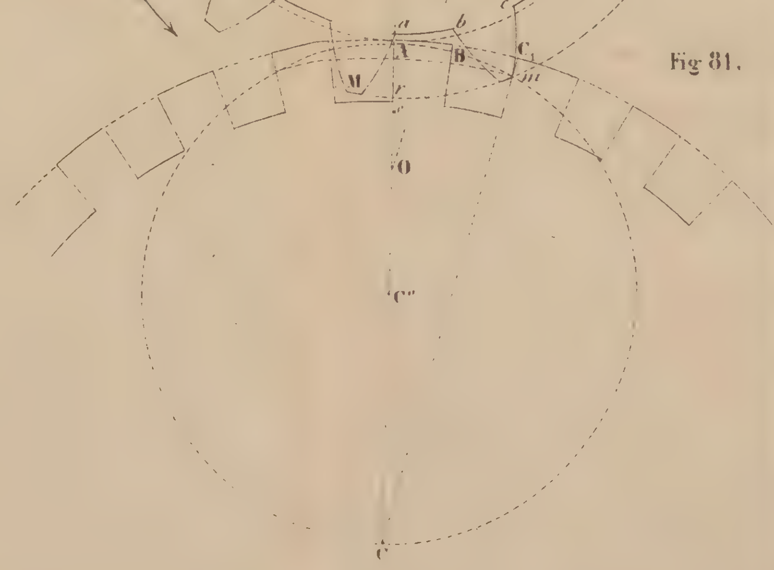

Fig 77.

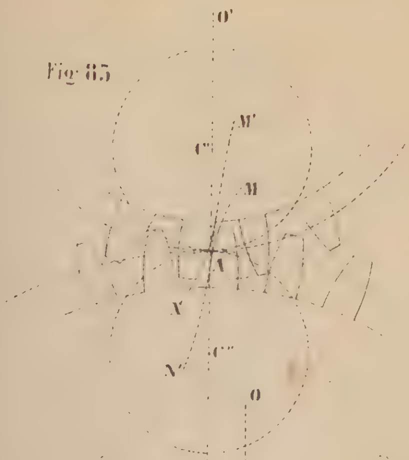

Fig 78.

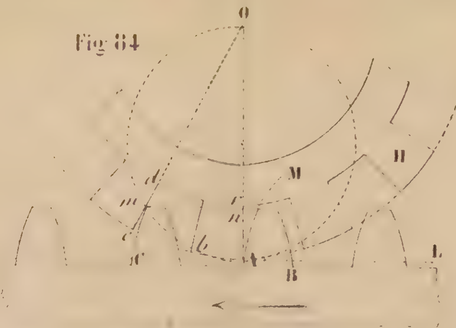

Fig 80.

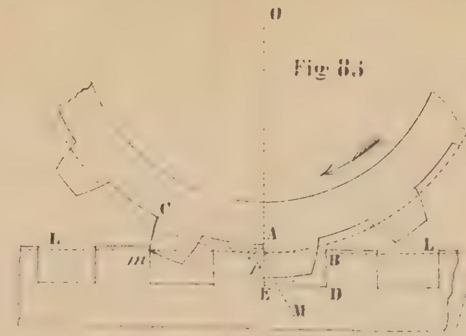

Fig 82.

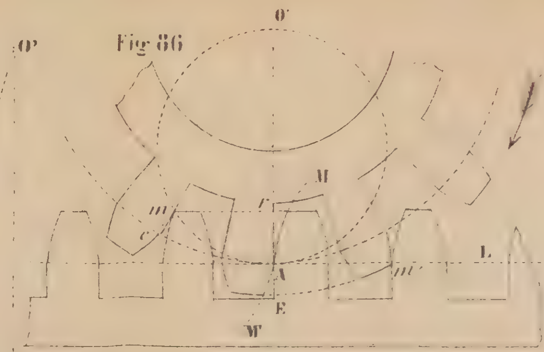

Fig 79

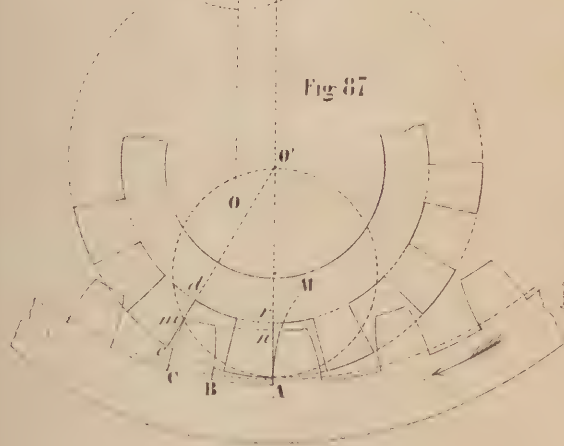

Fig 81.


Fig 85


Fig 84


Fig 85


Fig 86


Fig 87

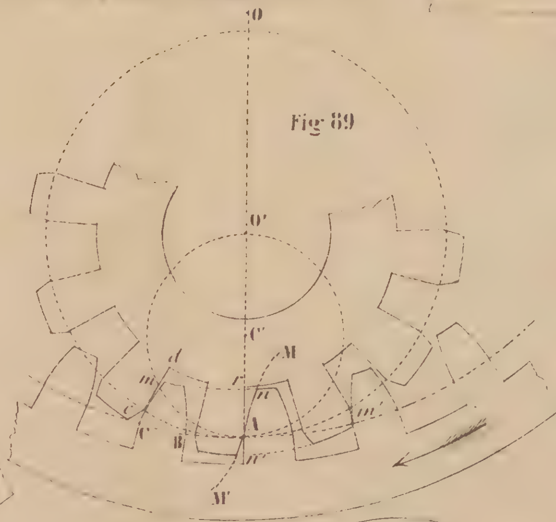
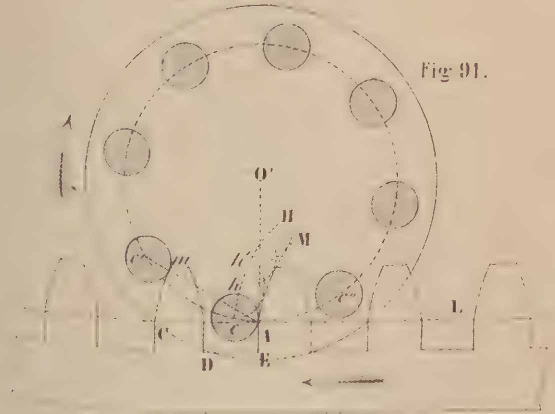
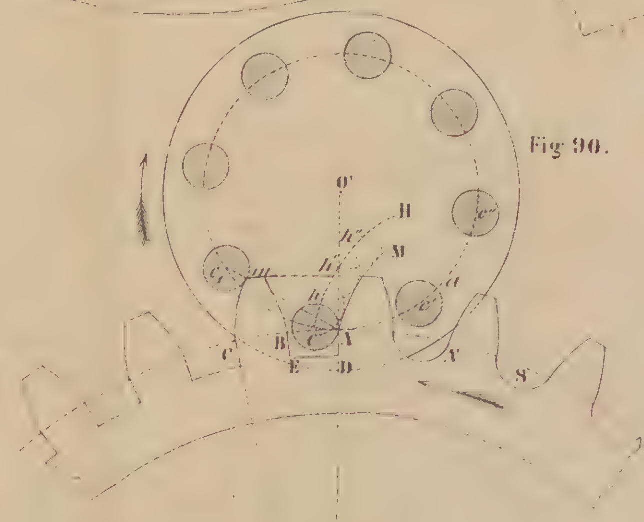
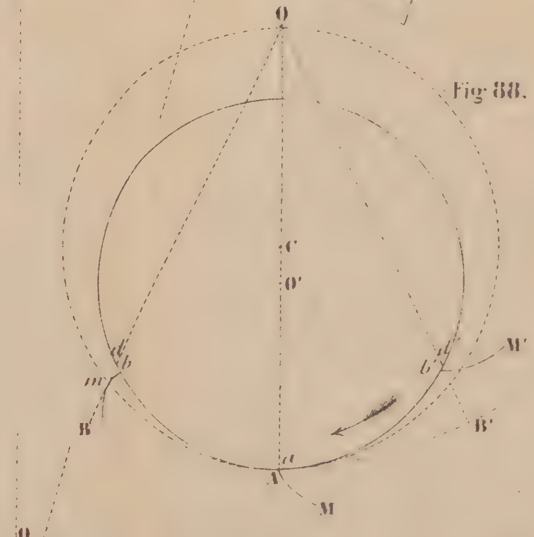
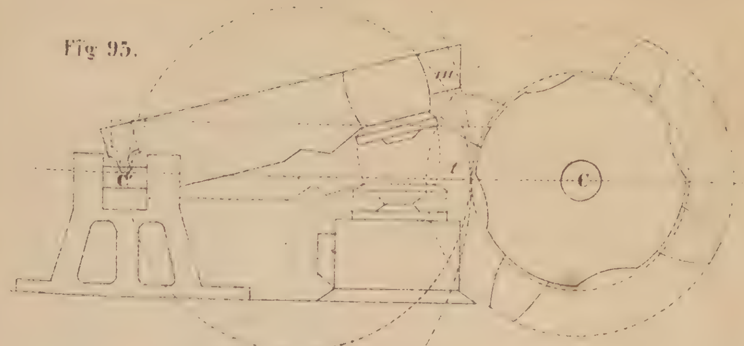

Fig 89

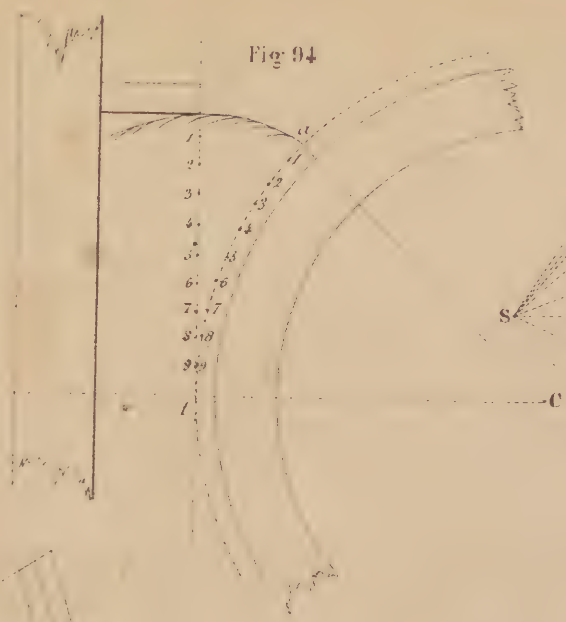

Fig 92.

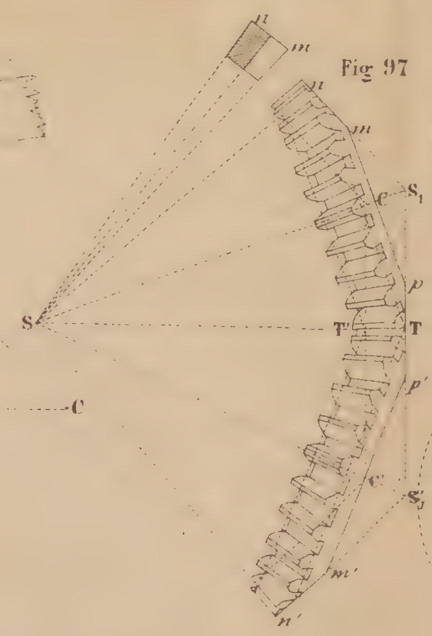

Fig 91.

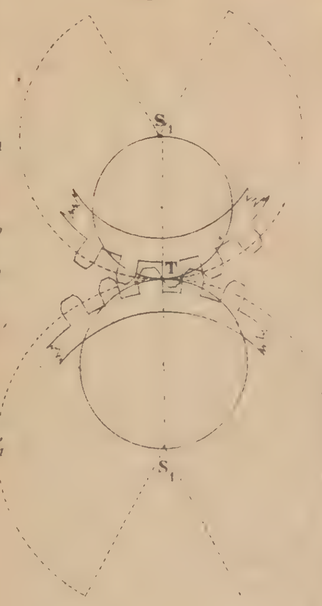

Fig 90.

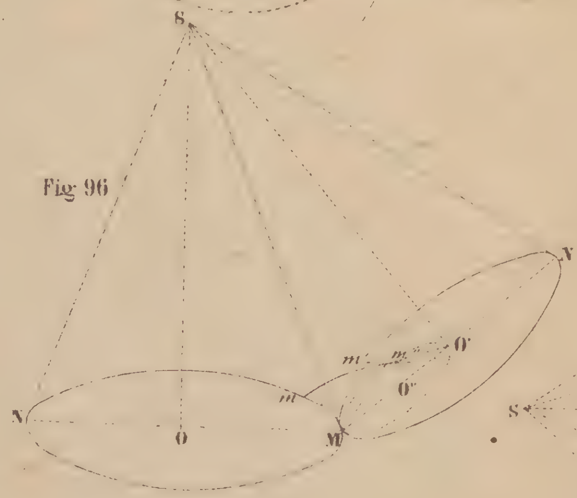

Fig 88.



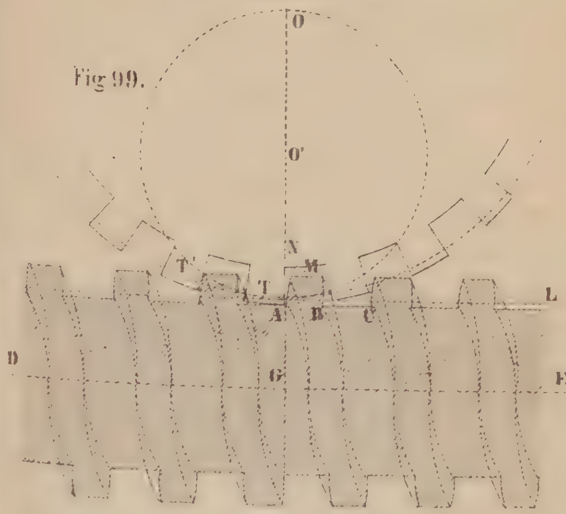


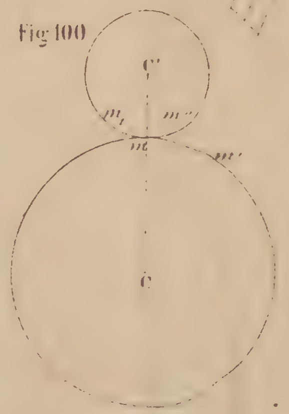


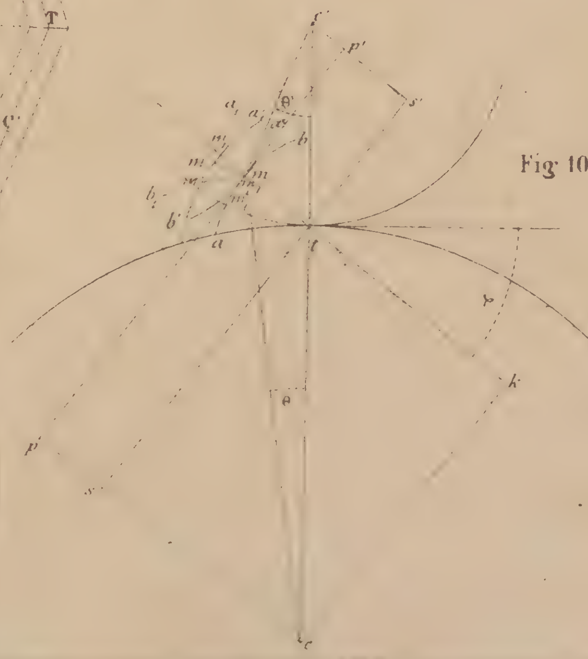


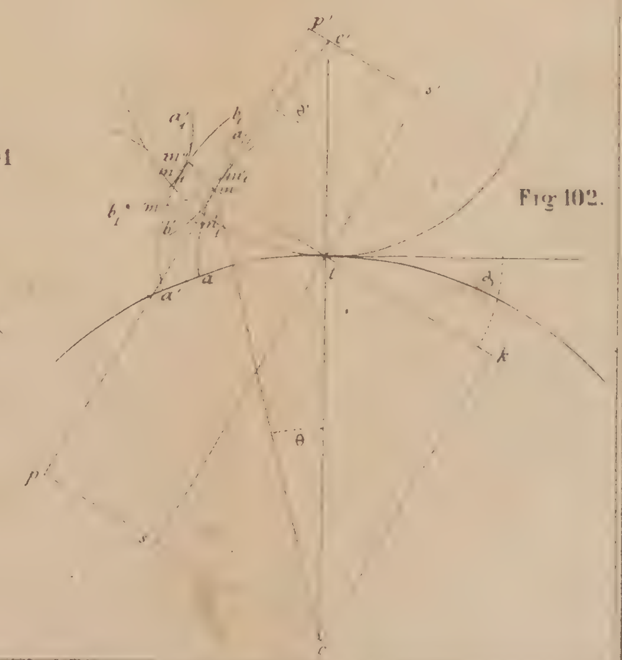




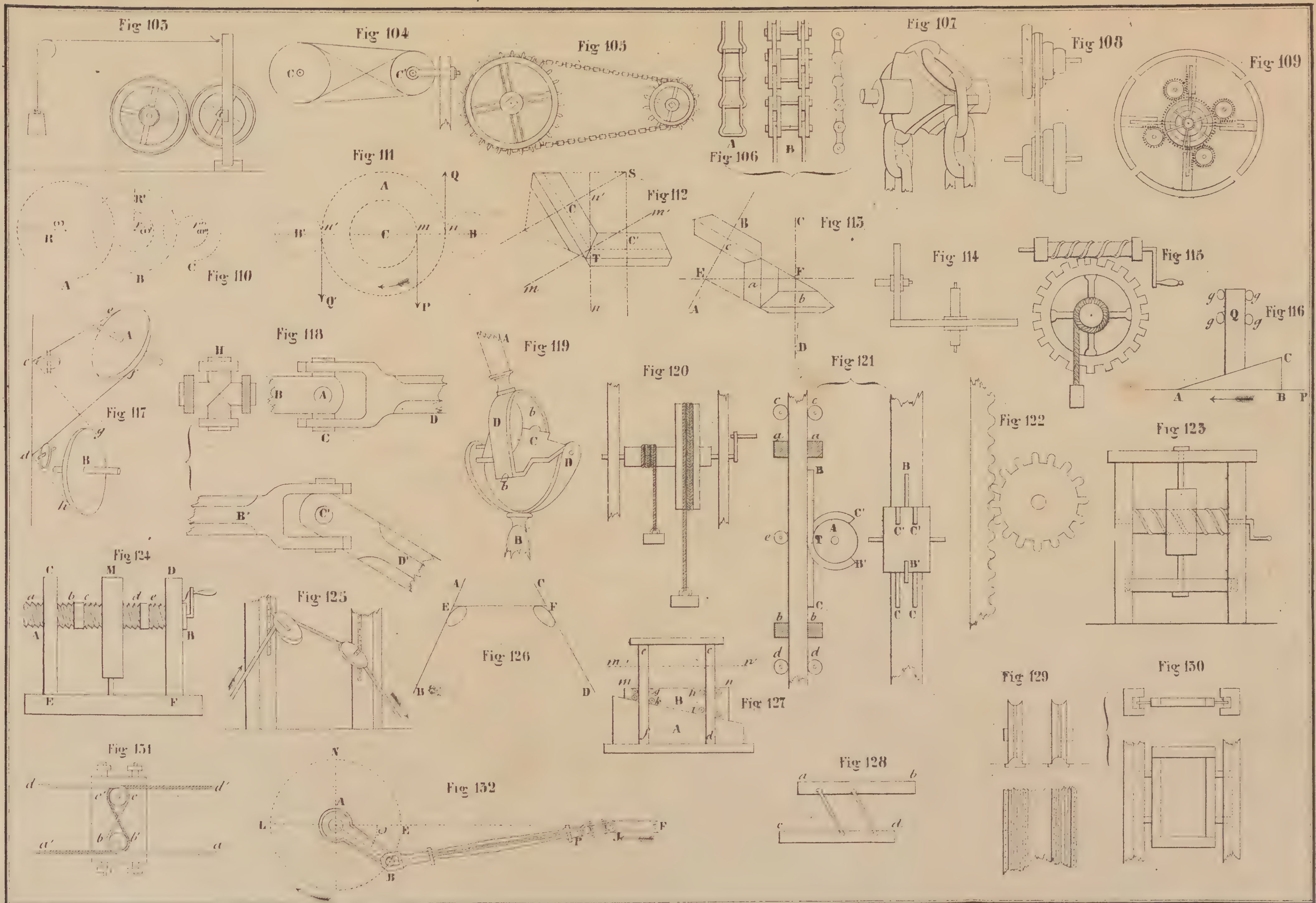








Lit. La Corte, Fuenca, ral. 6.



Lit. La Corte. Fuencarral. 6.

Fig. 133

Fig. 134

Fig. 135

Fig. 136

Fig. 137

Fig. 138

Fig. 139

Fig. 140

Fig. 141

Fig. 142

Fig. 143

Fig. 144

Fig. 145

Fig. 146

Fig. 147

Fig. 148

Fig. 149

Fig. 150

Fig. 151

Fig. 152

Fig. 153

Fig. 154

Fig. 155

Fig. 156

Fig. 157

Fig. 158

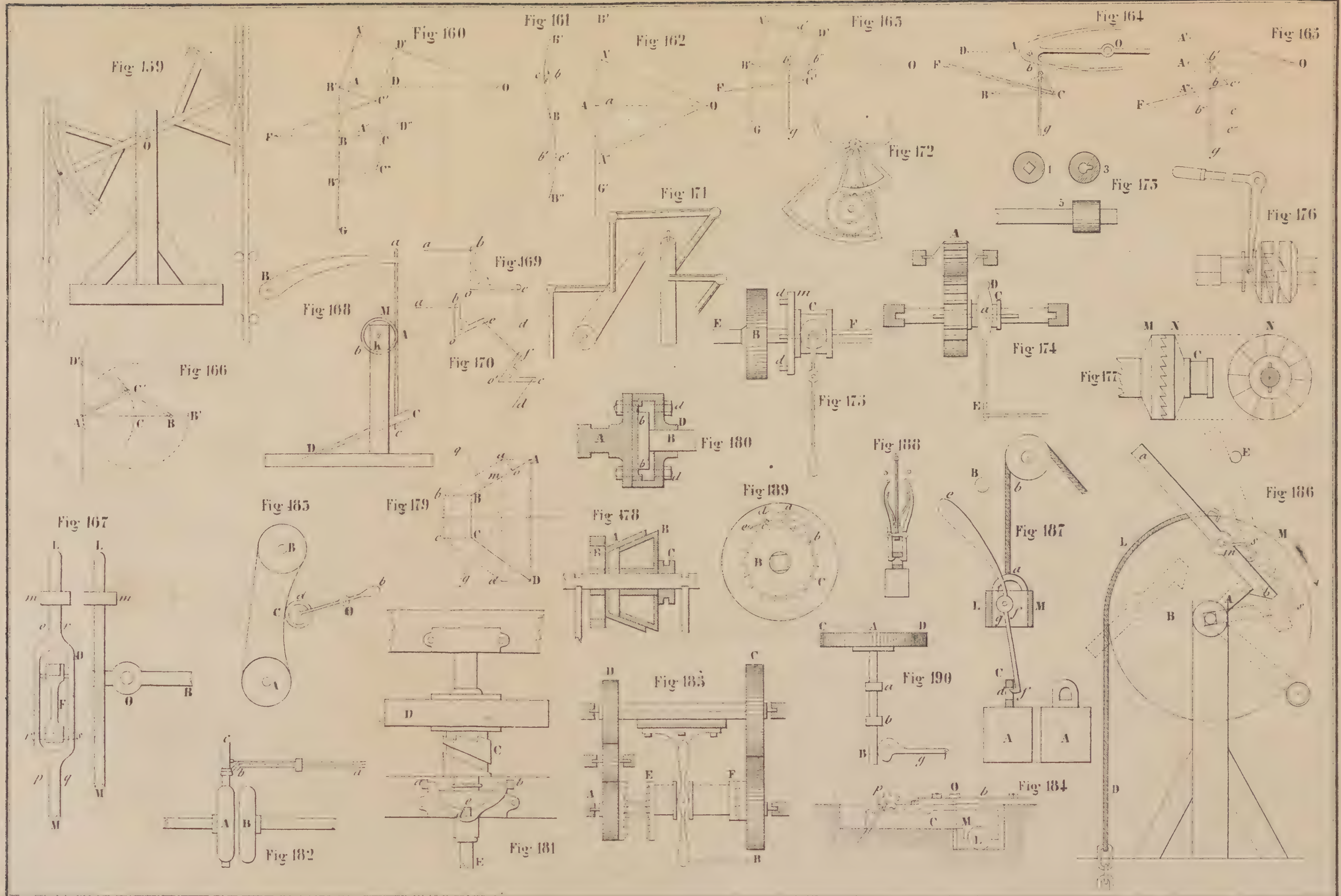
Fig. 133

Fig. 135

Fig. 136

Fig. 137

Fig. 138


Fig. 159
Fig. 160
Fig. 161
Fig. 162
Fig. 163
Fig. 164
Fig. 165
Fig. 166
Fig. 167
Fig. 168
Fig. 169
Fig. 170
Fig. 171
Fig. 172
Fig. 173
Fig. 174
Fig. 175
Fig. 176
Fig. 177
Fig. 178
Fig. 179
Fig. 180
Fig. 181
Fig. 182
Fig. 183
Fig. 184
Fig. 185
Fig. 186
Fig. 187
Fig. 188
Fig. 189
Fig. 190


UNIVERSIDAD DE SEVILLA
600056599

BUS